

Volumes Finis Mixtes Hybrides et
Écoulements en milieu poreux

FOUTSE KHOMH

9 décembre 2003

Table des matières

Dédicaces	i
Remerciements	ii
Résumé	iii
Notations	iv
Introduction	v
1 Schéma Numérique Pour La Méthode des Volumes Finis Mixtes Hybrides	1
1.1 Présentation du Problème Modèle	1
1.2 Présentation de la Méthode des Volumes Finis Mixtes Hybrides sur le problème modèle	2
1.3 Lien entre la Méthode des Volumes finis mixtes Hybride et la Méthode des Eléments Finis Mixtes Hybrides	8
2 Résultats de Stabilité et Estimations D'erreurs	12
2.1 Cas des conditions aux limites de Dirichlet	12
2.1.1 Resultat de Stabilité	13
2.1.2 Estimations d'erreurs	14
2.2 Cas des conditions aux limites de Dirichlet-Neumann	15
2.2.1 Résultat de stabilité	15
2.2.2 Estimations d'erreurs	21
3 Tests Numériques	29
3.1 Présentation de la Simulation	29
3.1.1 Démarche méthodologique de la Simulation	29
3.1.2 Fonctionnement de la simulation	29
3.2 Résultats obtenues	31
3.2.1 Application à des modèles fictifs	32
3.2.2 Application à des cas réels :la nappe de Djibouti	39

TABLE DES MATIÈRES **3**

4 Conclusion **45**

Conclusion **45**

Bibliographie **47**

Table des figures

1.1	schema d'une maille K	4
1.2	10
2.1	17
2.2	17
3.1	Démarche adoptée lors des simulations sur des cas concrets . .	30
3.2	Maillage du domaine (solution polynomiale)	32
3.3	Variation de l'erreur absolue en fonction du pas h du maillage	33
3.4	Lignes de niveau de la solution exacte	34
3.5	Lignes de courant de la solution exacte	34
3.6	Lignes de niveau de la solution VFMH	35
3.7	Lignes de courant de la solution VFMH	35
3.8	Tableau de comparaison des résultats cas solution polynomiale	36
3.9	Maillage du domaine (solution sinusoïdale)	37
3.10	Lignes de niveau : cas solution exacte sinusoïdale	38
3.11	Lignes de courant : cas solution exacte sinusoïdale	39
3.12	Lignes de niveau : cas solution VFMH sinusoïdale	40
3.13	Lignes de courant : cas solution VFMH sinusoïdale	41
3.14	Tableau de comparaison des résultats cas solution sinusoïdale .	41
3.15	Maillage du domaine(Nappe de Djibouti)	42
3.16	Carte des transmissivités(Nappe de Djibouti)	42
3.17	Légende Carte des transmissivités(Nappe de Djibouti)	42
3.18	Carte piézométrique(Nappe de Djibouti)	43
3.19	Écoulement en régime permanent(Nappe de Djibouti)	43

Dédicaces

- ♡ À tout ceux qui m'ont porté secours sous quelque façon que ce fût et je tiens à leur exprimer mes sincères remerciements ;
- ♡ Particulièrement, je pense à :
- Mon père *FOUTSE Abraham*
 - Ma mère *DORA NJAWE JESSIE*, qui contre vents et marées m'ont soutenus et encouragés tout au long de ces années d'études, qu'ils trouvent dans ce travail, l'expression de mon tendre amour.
- ♡ À mes frères et soeurs pour leurs multiples prières et sacrifices.
- ♡ À toute ma famille.

Remerciements

- ★ *Je remercie du fond du cœur le Seigneur, qui ne m'a jamais quitté des yeux tout le long de ces études, me donnant ainsi la force de fournir le travail qui est présenté ici ;*
- ★ *Je tiens à remercier Mon Directeur, le Docteur Abdou NJIFENJOU qui a accepté de sacrifier son précieux temps pour diriger ce travail ;*
- ★ *Je tiens à remercier tous mes enseignants du Département de Mathématiques pour la qualité des enseignements dispensés malgré les conditions de travail difficiles ;*
- ★ *Je tiens à remercier toute ma famille pour sa protection, son encadrement durant ses longues années d'études, surtout pour l'importance qu'elle accorde à ma réussite ;*
- ★ *Je remercie aussi tous mes amis, particulièrement CHOKOUAKE SIEBATSHEU Jean Bernard, HAMIDA YACOUBOU, KAMGHO TEZANOU, KWESSI NYANDJOU Armand, TCHOUALAG Laurent, TCHAMDJOU Blaise Ledoux ;*
- ★ *Un merci particulier à M.EKOBO Stéphane pour sa bonne collaboration ;*
- ★ *Encore une fois, merci à tous.*

Résumé

Dans ce travail, nous étudions un problème de diffusion 2D par la méthode de VOLUMES FINIS MIXTES HYBRIDES, une variante des ELEMENTS FINIS MIXTES HYBRIDES et des VOLUMES FINIS.

Pour un problème de ce type avec conditions aux limites de Dirichlet-Neumann, nous montrons des résultats de stabilité et d'estimations d'erreurs.

Nous présentons également dans la suite, le lien existant entre la méthode des VOLUMES FINIS MIXTES HYBRIDES et la METHODE DES ELEMENTS FINIS MIXTES HYBRIDES.

Pour terminer, nous présentons des résultats de simulation par cette méthode sur des problèmes de diffusion 2D; dans le cas des nappes fictives aux solutions connues, ainsi qu'un test effectué sur une nappe réelle : la nappe de Djibouti.

Mots Clés : *Diffusion, volumes finis classiques, Eléments finis mixtes hybrides, volumes finis mixtes hybrides, stabilité et estimations d'erreurs.*

Notations

$VFMH$: Volumes Finis Mixtes Hybrides.

Ω : ouvert de \mathbf{R}^2 .

Γ : Frontière de Ω .

Γ_{Dir} : Frontière de Dirichlet.

Γ_{Neu} : Frontière de Neumann.

$\{K\}_{K \in F}$: maillage sur Ω .

K : maille.

\mathbf{A} : est l'ensemble des arêtes du maillage.

\mathbf{A}^K : est le sous-ensemble de \mathbf{A} formé d'arêtes contenues dans Γ_K c'est à dire \mathbf{A}^K est l'ensemble des côtés de la maille K .

\mathbf{A}^{Ext} : est le sous-ensemble de \mathbf{A} formé d'arêtes contenues dans le bord Γ de Ω .

\mathbf{A}^{Int} : est le complémentaire de \mathbf{A}^{Ext} dans \mathbf{A} .

\mathbf{A}^{Neu} : est le sous-ensemble de \mathbf{A}^{Ext} formé d'arêtes contenues dans Γ_{Neu} .

\mathbf{A}^{Dir} : est le sous-ensemble de \mathbf{A}^{Ext} formé d'arêtes contenues dans Γ_{Dir} .

$\mathbf{A}^{Int/Neu} = \mathbf{A}^{Int} \cup \mathbf{A}^{Neu}$.

Introduction

De nos jours, la modélisation numérique des phénomènes physiques, joue un rôle sans cesse croissant dans la résolution des problèmes rencontrés dans divers domaines de la recherche en Ingénierie.

S'inscrivant dans la grande famille des méthodes numériques d'approximation, la méthode des VOLUMES FINIS MIXTES HYBRIDES que nous présentons dans ce travail, pour un problème de diffusion 2D, aux conditions de Dirichlet-Neumann, est une variante de la méthode des Eléments Finis Mixtes Hybrides. Bâtie sans formulation variationnelle, mais en s'inspirant seulement des Volumes Finis et de l'intuition physique. Comme utilisées dans [2], [6].

Cette méthode peut être considérée comme variante de la méthode des VOLUMES FINIS CLASSIQUES tel que présentés par [4] ceci justifiant l'appellation VOLUMES FINIS MIXTES HYBRIDES. Dans la suite, nous présenterons :

- ★ Premièrement le schéma numérique par cette méthode ;*
- ★ Deuxièmement des résultats de stabilité et d'estimations d'erreurs ;*
- ★ Troisièmement des tests de validation effectués sur des nappes fictives aux solutions connues, ainsi qu'un test effectué sur une nappe réelle : la nappe de Djibouti ;*
- ★ Une dernière partie interviendra en guise de conclusion à ce travail.*

SCHÉMA NUMÉRIQUE POUR LA MÉTHODE DES VOLUMES FINIS MIXTES HYBRIDES

1.1 Présentation du Problème Modèle

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert polygonal connexe de côtés parallèles aux axes de coordonnées en repère orthonormé. Sa frontière Γ est divisée en deux parties complémentaires, Γ_{Dir} (bord avec conditions aux limites de Dirichlet) et Γ_{Neu} (bord avec conditions aux limites de Neumann). Etant donné $f(\cdot)$ et $T(\cdot)$ deux fonctions (dont les propriétés de régularités restent à préciser) définies sur Ω , on cherche à déterminer une approximation des fonctions u et q telles que :

$$q(x) = -T(x)gradu \quad \text{sur } \Omega \quad (1.1.1)$$

$$divq(x) = f(x) \quad \text{sur } \Omega \quad (1.1.2)$$

$$\left. \begin{array}{l} u = 0 \text{ sur } \Gamma_{Dir} \quad (i) \\ q.n = 0 \text{ sur } \Gamma_{Neu} \quad (ii) \end{array} \right\} \quad (1.1.3)$$

où n est le vecteur unitaire de la normale à Γ , dirigé vers l'extérieur de Ω . Dans la suite de l'exposé, on suppose (sauf mention expresse du contraire) que :

$$\exists T^-, T^+ \text{ dans } \mathbb{R} \text{ tels que : } 0 < T^- \leq T(x) \leq T^+ \text{ dans } \Omega \quad (1.1.4)$$

$$f \text{ est dans } L^2(\Omega) \quad (1.1.5)$$

$$mes(\Gamma_{Dir}) > 0 \quad (1.1.6)$$

où $mes(\cdot)$ désigne la mesure de Lebesgue en 1D.

Remark 1 *L'étude théorique du système (1.1.1)-(1.1.3) est largement développée dans la littérature (voir par exemple [9]). On peut dire brièvement que le système (1.1.1)-(1.1.3) possède une solution unique notée encore (u, q) dans $L^2(\Omega) \times H(div, \Omega)$.*

Remark 2 *Le système (1.1.1)-(1.1.3) modélise plusieurs phénomènes de diffusion :*

- *En magnétostatique, u est le potentiel magnétique et q l'induction magnétique ;*
- *En thermique (ou encore énergétique), u est la température et q le flux de chaleur ;*
- *En mécanique des milieux poreux, u est la champ de pression et q la vitesse de Darcy.*

Dans ces différents phénomènes, $T(x)$ représente respectivement la perméabilité magnétique, la constante diélectrique, la conductivité thermique et la transmissivité du milieu poreux.

Notre objectif dans la suite est :

- (i) *d'exposer la discrétisation (1.1.1)-(1.1.3) par la méthode des Volumes Finis Mixtes Hybrides et de montrer que le schéma numérique qui en découle possède une solution discrète unique ;*
- (ii) *de montrer que ce schéma est stable et de donner des estimations d'erreurs par rapport à la solution exacte dans des normes appropriées.*

Definition 1 *Soit Ω un ouvert non vide de \mathbb{R}^2 et $\{\Omega_i\}_{i \in \{1, \dots, N\}}$ une famille d'ouverts de Ω tel que $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset \forall i \neq j$ et $\bar{\Omega} = \bigcup_{i=1}^N \bar{\Omega}_i$. Un maillage $\{K\}_{K \in \mathbb{F}}$ sur Ω est dit admissible si toute arête du maillage appartenant à \mathbb{A}^{Ext} est soit dans Γ_{Neu} soit dans Γ_{Dir} (autrement dit aucune arête du maillage appartenant à \mathbb{A}^{Ext} n'est à cheval entre Γ_{Neu} et Γ_{Dir}) et la frontière des Ω_i fait partie des interfaces du maillage.*

Definition 2 *Un maillage admissible $\{K\}_{K \in \mathbb{F}}$ sera dit régulier s'il existe un réel $\omega \in]0, 1]$ tel que $\omega h \leq h_K \leq h \forall K \in \mathbb{F}$. où h_K désigne le diamètre de la maille K et où on a posé $h = \max_{K \in \mathbb{F}} h_K$*

1.2 Présentation de la Méthode des Volumes Finis Mixtes Hybrides sur le problème modèle

Nous définissons sur Ω un maillage noté $\{K\}_{K \in \mathbb{F}}$. Par ailleurs, nous supposons que la fonction $T(\cdot)$ est constante dans chaque maille $K \in \mathbb{F}$, et on note T_K la valeur correspondante. cette hypothèse est courante en modélisation numérique des écoulements souterrains où $T(x)$ représente la transmissivité du milieu poreux au (*macro*) point de coordonnées x (cas de

1.2 Présentation de la Méthode des Volumes Finis Mixtes Hybrides sur le problème modèle

3

nappes souterraines et gisements pétrolifères : voir par exemple [3] ou [5]). Pour chaque maille $K \in \mathbb{F}$, on note Γ_K la frontière correspondante.

Dans la formulation volumes finis mixtes hybrides, on montre aisément que le système (1.1)-(1.3) est équivalent à celui qui suit :

$$\operatorname{div} q = f \quad \text{dans } K \quad \forall K \in \mathbb{F} \quad (1.2.1)$$

$$q(x) = -T_K \operatorname{grad} u \quad \text{dans } K \quad \forall K \in \mathbb{F} \quad (1.2.2)$$

$[[u]] = 0$ sur $\Gamma_K \cap \Gamma_L \quad \forall K, L \in \mathbb{F}$ avec K et L adjacents (cette relation exprime la continuité de u sur les interfaces du maillage).

$qn_{K/L} + qn_{L/K} = 0$ sur $\Gamma_K \cap \Gamma_L \quad \forall K, L \in \mathbb{F}$ avec K et L adjacentes (cette relation exprime la continuité du flux sur les interfaces du maillage)

$$u = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_{Dir} \quad (1.2.3)$$

$$q \cdot n = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_{Neu} \quad (1.2.4)$$

* $[[u]]$ désigne le saut de u à travers une interface donnée du maillage.

* $n_{K/L}$ désigne le vecteur unitaire de la normale à $\Gamma_K \cap \Gamma_L$, dirigé de K vers L .

les deux dernières équations expriment les conditions aux limites du problème à résoudre.

Dans la suite, nous utiliserons les mêmes notations que précédemment. Construisons pour le système (1.2.1) - (1.2.4) un schéma aux *Volumes Finis Mixtes Hybrides*. Sur un maillage admissible $\{K\}_{K \in \mathbb{F}}$.

En intégrant (1.2.1) dans K , on obtient :

$$\sum_{a \in \mathbb{A}^K} q_{a,K} = \operatorname{aire}(K) \langle f \rangle_K \quad \forall K \in \mathbb{F} \quad (1.2.5)$$

où on a posé :

$$\star q_{a,K} = \int_a q \cdot n_{a,K} ds \quad \forall a \in \mathbb{A}^K.$$

* $n_{a,K}$ étant le vecteur unitaire de la normale à l'arête $a \in \mathbb{A}^K$, dirigé vers l'extérieur de la maille K .

On déduit de (1.2.2) par une (méthode d') intégration numérique que pour chaque $K \in \mathbb{F}$. On a :

$$q_{a,K} \approx \frac{\operatorname{mes}(a)T_K}{d(x_a, x_K)} [u_K - u_{a,K}] \quad \forall a \in \mathbb{A}^K \quad (1.2.6)$$

où on a posé :

- ★ $u_K =$ valeur de u à l'intersection des médiatrices de K . ;
- ★ $u_{a,K} =$ valeur de u au milieu du côté a de la maille K (voir figure (1.1)).

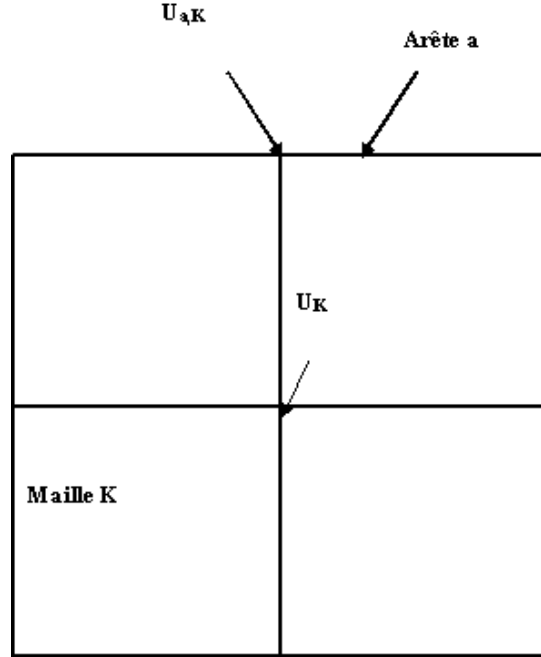


FIG. 1.1 – schema d'une maille K

Il résulte de la continuité de u et du flux sur les interfaces du maillage que :

$$\begin{cases} u_{a,K} = u_{a,L} \\ q_{a,K} + q_{a,L} = 0 \end{cases} \quad \forall a \in \mathbb{A}^K \cap \mathbb{A}^L \text{ avec } K \text{ et } L \text{ adjacentes.} \quad (1.2.7)$$

Enfin, il résulte des conditions aux limites (1.2.3) et (1.2.4) que pour toute maille K adjacente à la frontière Γ on a :

$$u_{a,K} = 0 \quad \forall a \in \mathbb{A}^K \cap \mathbb{A}^{Dir} \quad (1.2.8)$$

$$q_{a,K} = 0 \quad \forall a \in \mathbb{A}^K \cap \mathbb{A}^{Neu} \quad (1.2.9)$$

Les équations (1.2.5)-(1.2.9) suggèrent d'introduire le problème discret suivant :

Trouver $\{U_K\}_{K \in \mathbb{F}}, \{U_{a,K}\}_{\substack{K \in \mathbb{F} \\ a \in \mathbb{A}^K}}, \{Q_{a,K}\}_{\substack{K \in \mathbb{F} \\ a \in \mathbb{A}^K}}$ tels que :

$$\sum_{a \in \mathbb{A}^K} Q_{a,K} = \text{aire}(K) \langle f \rangle_K \quad \forall K \in \mathbb{F} \quad (1.2.10)$$

$$Q_{a,K} = \frac{\text{mes}(a) T_K}{d(x_a, x_K)} [U_K - U_{a,K}] \quad \forall a \in \mathbb{A}^K, \forall K \in \mathbb{F} \quad (1.2.11)$$

$$\begin{cases} U_{a,K} = U_{a,L} & (i) \\ Q_{a,K} + Q_{a,L} = 0 & (ii) \end{cases} \quad \forall a \in \mathbb{A}^K \cap \mathbb{A}^L \quad \text{avec K et L adjacentes} \quad (1.2.12)$$

$$U_{a,K} = 0 \quad \forall a \in \mathbb{A}^K \cap \mathbb{A}^{Dir} \quad (\text{Conditions de Dirichlet}) \quad (1.2.13)$$

$$Q_{a,K} = 0 \quad \forall a \in \mathbb{A}^K \cap \mathbb{A}^{Neu} \quad (\text{Conditions de Neumann}) \quad (1.2.14)$$

Où K est dans ces deux dernières égalités, une maille de \mathbb{F} adjacente à la frontière du domaine.

Le système d'équations (1.2.10) - (1.2.14) définit ce qu'on appelle un Schéma aux Volumes Finis Mixtes Hybrides où on a noté :

- ★ x_a = milieu de l'arête a ;
- ★ x_K = est le point de concours des médiatrices ;
- ★ $d(x_a, x_K)$ = distance de x_a à x_K ;
- ★ $\text{mes}(a)$ = mesure de Lebesgue de a (en 1D) ;
- ★ $\text{aire}(K)$ = mesure de Lebesgue de K (en 2D) ;

Remark 3 *On retrouve les volumes finis centrés classiques tels que présentés dans [4], par simple élimination des inconnues $\{U_{a,K}\}_{\substack{K \in \mathbb{F} \\ a \in \mathbb{A}^K}}$ dans le système d'équations (1.2.10)-(1.2.14).*

Le point de vue des Volumes Finis Mixtes Hybrides est différent puisque toutes les inconnues du système (1.2.10)-(1.2.14) ont la même importance. Ceci justifiant ainsi la terminologie Volumes Finis Mixtes Hybrides.

Il résulte de (1.2.10) et (1.2.13) que.

$$U_K = \frac{\sum_{a \in \mathbb{A}^K} \tau_{a,K} U_{a,K}}{\sum_{a \in \mathbb{A}^K} \tau_{a,K}} + \frac{\text{aire}(K)}{T_K \sum_{a \in \mathbb{A}^K} \tau_{a,K}} \langle f \rangle_K \quad (1.2.15)$$

où l'on a noté :

$$\tau_{a,K} = \frac{\text{mes}(a)}{d(x_a, x_K)} \quad (1.2.16)$$

En convenant de poser :

$U_a = U_{a,K} \quad \forall a \in \mathbb{A}^K, \quad \forall K \in \mathbb{F}$ La continuité du potentiel discret sur les arêtes est automatiquement assurée (relation (1.2.12)-(i))

Il résulte de la relation (1.2.12)-(ii) (assurant la continuité du flux sur les arêtes du maillage) et de (1.2.15) que les $\{U_a\}_{a \in \mathbb{A}^{Int/Neu}}$ vérifient les équations du système algébrique linéaire suivant :

$$\sum_{b \in \mathbb{A}^K} \frac{T_K \tau_{a,K} \tau_{b,K}}{\sigma_K} [U_a - U_b] + \sum_{b \in \mathbb{A}^L} \frac{T_L \tau_{a,L} \tau_{b,L}}{\sigma_L} [U_a - U_b] =$$

$$\frac{\tau_{a,K}}{\sigma_K} \langle f \rangle_K \text{aire}(K) + \frac{\tau_{a,L}}{\sigma_L} \langle f \rangle_L \text{aire}(L) \quad \forall a \in \mathbb{A}^{Int} \tag{1.2.17}$$

où $K, L \in \mathbb{F}$ sont tels que $a = \Gamma_K \cap \Gamma_L$;

La prise en compte des conditions aux limites de Neumann (1.2.14) et de Dirichlet (1.2.13). donne :

$$\sum_{b \in \mathbb{A}^K} \frac{T_K \tau_{a,K} \tau_{b,K}}{\sigma_K} [U_a - U_b] = \frac{\tau_{a,K}}{\sigma_K} \langle f \rangle_K \text{aire}(K) \quad \forall a \in \mathbb{A}^{Neu} \tag{1.2.18}$$

où K est une maille telle que $a = \Gamma_K \cap \Gamma_{Neu}$

$$U_a = 0 \quad \forall a \in \mathbb{A}^{Dir} \tag{1.2.19}$$

La quantité σ_K intervenant dans les équations précédentes est définie par :

$$\sigma_K = \sum_{b \in \mathbb{A}^K} \tau_{b,K} \quad \forall K \in \mathbb{F} \tag{1.2.20}$$

Remark 4 Les équations (1.2.17) et (1.2.18) sont équivalentes à la formulation unifiée suivante :

$$\sum_{K \in \mathbb{F}/a \in \mathbb{A}^K} \sum_{b \in \mathbb{A}^K} \frac{T_K \tau_{a,K} \tau_{b,K}}{\sigma_K} [U_a - U_b] = \sum_{K \in \mathbb{F}/a \in \mathbb{A}^K} \frac{\tau_{a,K}}{\sigma_K} \langle f \rangle_K \text{aire}(K) \quad \forall a \in \mathbb{A}^{Int/Neu} \tag{1.2.21}$$

Proposition 1 Le problème discret (1.2.17) – (1.2.19) possède une solution unique.

Proof.

Utilisant la remarque ci-dessus, il suffit de montrer que le problème discret :

Trouver $\{U_a\}_{a \in \mathbf{A}^{Int/Neu}}$ tel que :

$$\sum_{K \in \mathbb{F}/a \in \mathbb{A}^K} \sum_{b \in \mathbb{A}^K} \frac{T_K \tau_{a,K} \tau_{b,K}}{\sigma_K} [U_a - U_b] = 0 \quad \forall a \in \mathbb{A}^{Int/Neu} \quad (1.2.22)$$

$$\text{avec } U_a = 0 \quad \forall a \in \mathbb{A}^{Dir} \quad (1.2.23)$$

admet le vecteur nul comme unique solution.

Soit donc $a \in \mathbb{A}^{Int/Neu}$ et on multiplie (1.2.22) par U_a , en effectuant la somme sur $a \in \mathbb{A}^{Int/Neu}$ et en re-ordonnant les termes, on obtient :

$$\sum_{K \in \mathbb{F}} \sum_{a, b \in \mathbb{A}^K} \frac{T_K \tau_{a,K} \tau_{b,K}}{\sigma_K} [U_a - U_b]^2 = 0$$

Il en résulte, puisque $\frac{T_K \tau_{a,K} \tau_{b,K}}{\sigma_K} > 0$, que

$$\forall K \in \mathbb{F} \quad \forall a, b \in \mathbb{A}^K \quad U_a - U_b = 0 \quad (1.2.24)$$

Comme $\text{mes}(\Gamma_{Dir}) > 0$ d'après l'hypothèse (1.1.6), il existe (au moins un) $a_o \in \mathbb{A}^{Dir}$ et donc $U_{a_o} = 0$ en vertu de (1.2.23).

Soit $K_0 \in \mathbb{F}$ tel que $a_0 \in \mathbb{A}^{K_0}$; il résulte de (1.2.24) que $U_b = 0 \quad \forall b \in \mathbb{A}^{K_0}$

On en déduit de proche en proche puisque Ω est connexe, que $U_a = 0$

$$\forall a \in \mathbb{A}^{Int/Neu}$$

C'est ainsi que s'achève la preuve de la proposition



Résumé : *La mise en oeuvre pratique du schéma aux Volumes Finis Mixtes Hybrides (1.2.10)-(1.2.24) peut s'effectuer en trois étapes :*

- ★ *Dans la première étape (étape 1), on résoud le système algébrique linéaire (1.2.17)-(1.2.19) ; l'étude de ce système fait partie de nos priorités dans ce qui suit ;*
- ★ *Dans la deuxième étape (étape 2), on utilise les résultats de la première étape pour déterminer les potentiels numériques $\{U_K\}_{K \in \mathbb{F}}$ dans les mailles grâce à la relation (1.2.15) ;*
- ★ *Dans la troisième étape, on utilise les résultats des étapes 1 et 2 pour déterminer les flux numériques $\{Q_{a,K}\}_{a \in \mathbb{A}^K}^{K \in \mathbb{F}}$ sur les arêtes.*

Remark 5 *Le raisonnement fait pour prouver que le problème (1.2.17)-(1.2.19) possède une solution unique, montre que la matrice associée à ce système est définie positive. Comme de plus cette matrice est symétrique, la résolution sur ordinateur du système (1.2.17)-(1.2.19) peut être effectuée en faisant appel à une large gamme d'algorithmes performants adaptés à ce genre de situation : CHOLESKY, GAUSS-SCEIDEL, GRADIENT CONJUGUE etc...*

Remark 6 *Le système correspondant à la formulation Volumes Finis Mixtes Hybrides, peut se déduire du système correspondant à la formulation Eléments Finis Mixtes Hybrides, par utilisation d'une formule de quadrature. Le lien entre ces deux est présenté dans le paragraphe suivant. La méthode des Volumes Finis Mixtes Hybrides porte donc bien son nom.*

1.3 Lien entre la Méthode des Volumes finis mixtes Hybride et la Méthode des Eléments Finis Mixtes Hybrides

Dans cette partie nous présentons brièvement le lien existant entre la méthode des Eléments Finis Hybrides et celle des Volumes Finis Mixtes Hybrides, tels que développée dans [8].

Dans chaque maille K appartenant à \mathbb{F} on fait une approximation de u et de q par les relations :

$$\begin{aligned} (i) \quad & \bar{U}_{K \in \mathbb{F}} = \text{approximation de } u \text{ moyen dans } K \\ (ii) \quad & \bar{U}_{a, K \in \mathbb{F}} = \text{approximation de } u \text{ moyen sur } a \in \mathbb{A}^K \\ (iii) \quad & \bar{Q}_{K \in [RT]_K} = \text{approximation de } q \text{ dans } K \end{aligned} \tag{1.3.1}$$

où $[RT]_K$ est l'espace de Raviart-Thomas (de plus petit ordre) formé de fonctions vectorielles définies sur K . plus précisément on a :

$$[RT]_K = \left\{ \begin{array}{l} V_K \in H(\text{div}, K); \quad \text{div} V_K \text{ est constant sur } K, \\ V_K \cdot n_{a,K} \text{ est constant sur chaque } a \in \mathbb{A}^K \\ V_K \text{ est parfaitement déterminé par ses flux} \\ V_{a,K} \text{ à travers les arêtes } a \in \mathbb{A}^K \end{array} \right.$$

où on a posé $H(\text{div}, K) = \left\{ V_K \in (L^2(\Omega))^2; \quad \text{div} V_K \in L^2(K) \right\}$ et où $n_{a,K}$ désigne le vecteur unitaire normal à l'arête $a \in \mathbb{A}^K$, orienté vers l'extérieur de l'élément K . Il est alors naturel d'utiliser comme fonctions de base pour $[RT]_K$ le champ de vecteurs $\{\ell_a\}_{a \in \mathbb{A}^K}$ définis par :

$$\int_b \ell_a \cdot n_{b,K} ds = \delta_{ab} \quad \forall a, b \in \mathbb{A}^K \quad (1.3.2)$$

où δ_{ab} est le symbole de Kronecker. Par rapport à cette base chaque élément $v_K \in [RT]_K$ se décompose de la manière suivante :

$$v_K(x) = \sum_{a \in \mathbb{A}^K} v_{a,K} \ell_a(x) \quad \forall v_K \in [RT]_K \quad (1.3.3)$$

En particulier pour

$$v_K = \bar{Q}_K \text{ on a } \quad \bar{Q}_K(x) = \sum_{a \in \mathbb{A}^K} \bar{Q}_{a,K} \ell_a(x) \quad (1.3.4)$$

Suivant [2] [1] la formulation éléments finis mixtes hybrides discrète du système (1.1.1) – (1.1.3) consiste à :

Trouver $\{\bar{U}_K\}_{K \in \mathbb{F}}$, $\{\bar{U}_{a,K}\}_{a \in \mathbb{A}^K}^{K \in \mathbb{F}}$ $\{\bar{Q}_{a,K}\}_{a \in \mathbb{A}^K}^{K \in \mathbb{F}}$ tels que

$$\sum_{a \in \mathbb{A}^K} \bar{Q}_{a,K} = \int_K f(x) dx \quad \forall K \in \mathbb{F} \quad (1.3.5)$$

$$(T_K)^{-1} \sum_{b \in \mathbb{A}^K} \bar{Q}_{b,K} \int_K \ell_b(x) \cdot \ell_a(x) dx = \bar{U}_K \int_K \text{div} \ell_a dx - \sum_{b \in \mathbb{A}^K} \bar{U}_{b,K} \int_b \ell_a \cdot n_{b,K} ds \quad \forall K \in \mathbb{F} \quad \forall a \in \mathbb{A}^K \quad (1.3.6)$$

$$\bar{U}_{a,K} = \bar{U}_{a,L} \quad \forall a \in \mathbb{A}^K \cap \mathbb{A}^L \quad \text{avec } K \text{ et } L \text{ adjacentes} \quad (1.3.7)$$

$$\bar{Q}_{a,K} + \bar{Q}_{a,L} = 0 \quad \forall a \in \mathbb{A}^K \cap \mathbb{A}^L \text{ avec } K \text{ et } L \text{ adjacentes}$$

$$\bar{U}_{a,K} = 0 \quad \forall a \in \mathbb{A}^K \cap \mathbb{A}^{Dir}$$

$$\bar{Q}_{a,K} = 0 \quad \forall a \in \mathbb{A}^K \cap \mathbb{A}^{Neu} \quad (1.3.8)$$

Examinons le second membre de l'équation (1.3.6), à la lumière de (1.3.2). Il est aisé de voir que

$$\bar{U}_K \int_K \text{div} \ell_a(x) dx = \bar{U}_K \quad \text{et} \quad \sum_{b \in \mathbb{A}^K} \bar{U}_{b,K} \int_b \ell_a \cdot n_{b,K} ds = \bar{U}_{a,K} \quad \forall a \in \mathbb{A}^K \quad (1.3.9)$$

Sans nuire à la généralité, on peut poser : $K =]0, h_1^K[\times]0, h_2^K[$ voir figure (1.2) Nous allons expliciter les fonctions de base $\{\ell_a\}_{a \in \mathbb{A}^K}$ ensuite on va appliquer une formule de quadrature à l'intégrale :

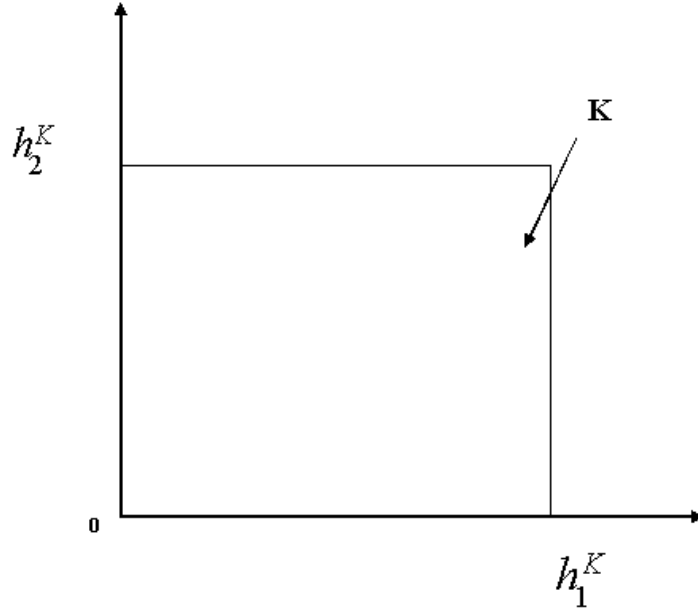


FIG. 1.2 –

$\int_K \ell_a(x) \cdot \ell_b(x) dx$ intervenant dans le premier membre de (1.3.6). Avec le numérotage des arêtes indiqué dans la figure 1.2, on a : $\ell_1(x) = \left[\frac{x_1}{h_1^K h_2^K}, 0 \right]$, $\ell_2(x) = \left[\frac{x_1 - h_1^K}{h_1^K h_2^K}, 0 \right]$, $\ell_3(x) = \left[0, \frac{x_2}{h_1^K h_2^K} \right]$, $\ell_4(x) = \left[0, \frac{x_2 - h_2^K}{h_1^K h_2^K} \right]$. On voit alors que :

$$\int_K \ell_a(x) \cdot \ell_b(x) dx \approx 0 \text{ pour } a \in \{1, 2\} \text{ et } b \in \{3, 4\}$$

Examinons le cas $a = 1$ et $b = 2$ (le cas $a = 3$ et $b = 4$ est similaire) :

$$\int_K \ell_1(x) \cdot \ell_2(x) dx = \int_K \frac{x_1(x_1 - h_1^K)}{(h_1^K)^2 (h_2^K)^2} dx_1 dx_2 = \frac{1}{(h_1^K)^2 h_2^K} \int_0^{h_1^K} x_1(x_1 - h_1^K) dx_1$$

En approximant la dernière intégrale par la formule des trapèzes on voit que :

$$\int_K \ell_1(x) \cdot \ell_2(x) dx \approx 0$$

Examinons le cas $a = b = 1$ (les autres cas sont similaires) :

$$\int_K [\ell_1(x)]^2 dx = \int_K \frac{(x_1)^2}{(h_1^K)^2 (h_2^K)^2} dx_1 dx_2 = \frac{1}{(h_1^K)^2 h_2^K} \int_0^{h_1^K} (x_1)^2 dx_1$$

En approximant la dernière intégrale par la formule des trapèzes on voit que :

$$\int_K [\ell_1(x)]^2 dx = \int_K \frac{h_1^K}{2h_2^K} = \frac{h_1^K/2}{h_2^K}$$

En remarquant qu'avec les notations du paragraphe (1.2) on a :
 $h_1^K/2 = d(x_a, x_K)$ et $h_2^K = \text{mes}(a)$

On voit que l'application de la formule des trapèzes que nous venons d'opérer, compte tenu de (1.3.9), montre que (1.2.1) se déduit de (1.3.6) par une formule de quadrature.

Conclusion *Le système discret (1.2.17) – (1.2.19) correspondant à une formulation volumes finis mixtes hybrides peut se déduire du système discret (1.3.5) – (1.3.8) correspondant à une formulation éléments finis mixtes hybrides par utilisation d'une formule de quadrature dans le premier membre de (1.3.6). Le lien entre ces deux méthodes numériques (pour les problèmes de diffusion) est ainsi établi.*

RÉSULTATS DE STABILITÉ ET ESTIMATIONS D'ÉRREURS

Dans ce chapitre nous travaillerons sur un maillage rectangulaire

2.1 Cas des conditions aux limites de Dirichlet

L'étude numérique de la méthode a déjà été réalisée dans ce cas. (voir [8]) Dans cette partie, nous travaillons dans le cadre d'un maillage admissible régulier $\{K\}_{K \in \mathbb{F}}$. Avec l'hypothèse :

$$mes(\Gamma_{Neu}) = 0 \tag{2.1.1}$$

Dans ce qui suit, nous présenterons brièvement et juste à titre indicatif les différents résultats obtenus. Soit

$$E(\mathbb{A}) = \begin{cases} V : \bigcup_{a \in \mathbb{A}} a \rightarrow \mathbb{R}; & V(x) = \text{une constante sur } a \quad \forall a \in \mathbb{A}^{int} \\ & V(x) = 0 \quad \text{sur } a \quad \forall a \in \mathbb{A}^{ext} \end{cases}$$

Il est alors naturel d'identifier une fonction V de $E(\mathbb{A})$ avec le vecteur $(V_a)_{a \in \mathbb{A}}$ où V_a est la valeur de V sur l'arête a . Associons à chaque élément de $(V_a)_{a \in \mathbb{A}}$ de $E(\mathbb{A})$ une unique fonction vectorielle \vec{V} définie sur Ω (presque partout) à valeur dans \mathbb{R}^4 telle que :

$$\vec{V}(x) = \{V_a\}_{a \in \mathbb{A}^K} \quad \text{si } x \in K, \text{ avec } K \in \mathbb{F}.$$

Posons $E(\mathbb{A}, \mathbb{F})$ l'espace des fonctions \vec{V} et équipons cet espace d'une norme discrète définie par :

$$\|\vec{V}\|_{E(\mathbb{A}, \mathbb{F})} = \left\{ \sum_{\substack{K \in \mathbb{F} \\ a, b \in \mathbb{A}^K}} \frac{\tau_{a,K} \tau_{b,K}}{\sigma_K} [V_a - V_b]^2 \right\}^{1/2} \quad \forall \vec{V} \in E(\mathbb{A}, \mathbb{F}) \tag{2.1.2}$$

2.1.1 Resultat de Stabilité

En utilisant la Remarque 4 et l'hypothèse (2.1.1), le problème discret (1.2.17) – (1.2.19) est équivalent au problème suivant :

Trouver $\{U_a\}_{a \in \mathbb{A}^{int}}$ tels que :

$$\sum_{K \in \mathbb{F}/a \in \mathbb{A}^K} \sum_{b \in \mathbb{A}^K} \frac{T_K \tau_{a,K} \tau_{b,K}}{\sigma_K} [U_a - U_b] = \sum_{K \in \mathbb{F}/a \in \mathbb{A}^K} \frac{\tau_{a,K}}{\sigma_K} \text{aire}(K) < f >_K \quad \forall a \in \mathbb{A}^{int} \quad (2.1.3)$$

$$U_a = 0 \quad \forall a \in \mathbb{A}^{Ext} \quad (2.1.4)$$

On doit montrer que le schéma numérique (2.1.3) – (2.1.4) est stable au sens de la norme discrète définie par (2.1.2). Pour cela on utilisera le résultat suivant.

Lemma 2 Pour toute fonction $\vec{V}(\cdot)$ de $E(\mathbb{A}, \mathbb{F})$ définie comme il est indiqué dans la section 2.1 on a :

$$\sum_{K \in \mathbb{F}} \left[\text{aire}(K) \sum_{a \in \mathbb{A}^K} (V_a)^2 \right] \leq 8 \frac{[\text{diam}(\Omega)]^2}{w^4} \left[\sum_{\substack{K \in \mathbb{F} \\ a, b \in \mathbb{A}^K}} \frac{\tau_{a,K} \tau_{b,K}}{\sigma_K} [V_a - V_b]^2 \right] \quad (2.1.5)$$

Remark 7 $\sum_{K \in \mathbb{F}} \left[\text{aire}(K) \sum_{a \in \mathbb{A}^K} (V_a)^2 \right] = \int_{\Omega} |\vec{V}(x)|^2 dx$

l'inégalité donnée par le lemme précédent peut être interprétée comme une inégalité du type Poincaré discret.

La preuve de ce lemme est entièrement faite dans [8] au même titre que celle du résultat suivant.

Proposition 3 L'unique solution du problème discret (2.1.3) – (2.1.4), notée $\{U_a\}_{a \in \mathbb{A}^{int}}$, Vérifie :

$$\left[\sum_{\substack{K \in \mathbb{F} \\ a, b \in \mathbb{A}^K}} \frac{\tau_{a,K} \tau_{b,K}}{\sigma_K} [U_a - U_b]^2 \right]^{1/2} \leq \frac{\text{diam}(\Omega)}{T_{\min}^- \omega^6} \|f\|_{L^2(\Omega)} \quad (2.1.6)$$

Ce résultat établit la stabilité de la méthode dans le cas des conditions aux limites de Dirichlet.

2.1.2 Estimations d'erreurs

Le problème discret (1.2.17) – (1.2.19) est une émanation du système de relations suivantes satisfaites par la solution exacte $\{u_K\}_{K \in \mathbb{F}}$, $\{u_{a,K}\}_{a \in \mathbb{A}^K}^{K \in \mathbb{F}}$, $\{q_{a,K}\}_{a \in \mathbb{A}^K}^{K \in \mathbb{F}}$

$$\sum_{a \in \mathbb{A}^K} q_{a,K} = \text{aire}(K) \langle f \rangle_K \quad \forall K \in \mathbb{F} \quad (2.2.1)$$

$$q_{a,K} = \text{mes}(a) \frac{T_K}{d(x_a, x_K)} [u_K - u_{a,K}] + R_{a,K} \quad \forall a \in \mathbb{A}^K \quad \forall K \in \mathbb{F} \quad (2.2.2)$$

$$\begin{cases} (i) u_{a,K} = u_{a,L} & \forall a \in \mathbb{A}^K \cap \mathbb{A}^L, \text{ avec } K \text{ et } L \text{ adjacentes} \\ (ii) q_{a,K} + q_{a,L} = 0 \end{cases} \quad (2.2.3)$$

Conditions aux limites : pour toute maille K de \mathbb{F} adjacente à la frontière du domaine on a :

$$u_{a,K} = 0 \quad \forall a \in \mathbb{A}^K \cap \mathbb{A}^{Ext} \quad (2.2.4)$$

(On rappelle que $\Gamma_{Neu} = \phi$; voir relation (2.1.1). Ce qui explique pourquoi nous n'avons pas les conditions aux limites de Neumann).

Dans la relation (2.2.2) $R_{a,K}$ représente l'erreur de troncature et vérifie, puisque $f \in C^1(\bar{\Omega})$

$$|R_{a,K}| \leq Ch^2 \quad (2.2.5)$$

où C désigne une constante réelle > 0 indépendante de h .

Proposition 4 (Estimation d'erreur)

Soit $\{K\}_{K \in F}$ un maillage admissible et régulier (au sens des définitions 1 et 2) du domaine polygonal.

Soit $(u, q) \in L^2(\Omega) \times H(\text{div}, \Omega)$ la solution exacte du problème mixte (1.1.1) – (1.1.3), avec $u|_K \in C^3(K)$ quel que soit $K \in F$ On pose :

- ★ $U_K =$ valeur de u au centre de la maille K , $K \in F$;
 - ★ $U_{a,K} =$ valeur de u au milieu du côté a de la maille K $K \in F$ et $a \in \mathbb{A}^K$;
 - ★ $\mathbb{A}^K =$ ensemble des côtés de la maille K ;
 - ★ $q_{a,K} =$ valeur du flux à travers le côté a de la maille K $K \in F$ et $a \in \mathbb{A}^K$;
- $U_K, U_{a,K}$ et $Q_{a,K}$ sont les approximations Volumes Finis Mixtes Hybrides (données par le schéma numérique) (1.2.10) – (1.2.14) des quantités $u_K, u_{a,K}$ et $q_{a,K}$ respectivement. Alors, en notant :

$$\odot e_a = u_a - U_a \quad a \in \mathbb{A}^K \text{ avec } \mathbb{A} = \text{ensemble des arêtes du maillage,}$$

$$O_n a : \sum_{a,b \in AK} (\sum_{a,b \in AK} [e_a - e_b]^2) + \sum_{K,L \in F / K \cap \bar{L} \in A} [e_K - e_L]^2 + \sum_{K \in F} (\sum_{a \in AK} (q_{a,K} - Q_{a,K})^2) \leq Ch^2$$

pour la preuve de cette proposition voir [8].

Dans ce qui suit, nous montrons des résultats de stabilité et d'estimations d'erreurs dans le cas des conditions aux limites de Dirichlet Neumann.

2.2 Cas des conditions aux limites de Dirichlet-Neumann

Dans toute cette partie, nous travaillons avec un maillage admissible régulier $\{K\}_{K \in F}$.

Introduisons des normes discrètes appropriées pour l'analyse de la stabilité et de l'erreur.

Soit l'ensemble :

$$T(A) = \left\{ \begin{array}{l} V : \cup_{a \in A} a \rightarrow R : \quad V(x) = cste \text{ sur } a \quad \forall a \in A^{Int/Neu} \\ V(x) = 0 \quad \text{sur } a, \quad \forall a \in A^{Dir} \end{array} \right\}$$

IL est alors naturel d'identifier une fonction V de $T(A)$ avec le vecteur $(Va)_{a \in A}$

où V_a est la valeur de V sur l'arête a .

Associons à chaque élément $(Va)_{a \in A}$ de $T(A)$ une unique fonction vectorielle \vec{V} définie sur Ω (presque partout) à valeurs dans R^4 telle que $\vec{V}(x) = \{V_a\}_{a \in AK}$ si $x \in K$, avec $K \in F$

Notons $T(A, F)$, l'espace des fonctions \vec{V} et équipons cet espace de la norme :

$$\|\vec{V}\|_{T(A,F)} = \left\{ \sum_{\substack{K \in F \\ a,b \in AK}} \frac{\tau_{a,K} \tau_{b,K}}{\sigma_K} (V_a - V_b)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}, \forall \vec{V} \in T(A, F)$$

2.2.1 Résultat de stabilité

En utilisant les hypothèses de continuité de u et du flux sur les interfaces du maillage le problème discret est équivalent au problème suivant :

Trouver $\{U_a\}_{a \in A^{Int/Neu}}$ tels que :

$$\sum_{K \in \mathbb{F}/a, b \in \mathbb{A}^K} \sum_{b \in \mathbb{A}^K} \frac{T_K \tau_{a,K} \tau_{b,K}}{\sigma_K} [U_a - U_b] = \sum_{K \in \mathbb{F}/a, b \in \mathbb{A}^K} \frac{\tau_{a,K}}{\sigma_K} \text{aire}(K) < f >_K \quad \forall a \in \mathbb{A}^{Int/Neu} \quad (2.2.6)$$

$$U_a = 0 \quad \forall a \in \mathbb{A}^{Dir} \quad (2.2.7)$$

Lemma 5 (Inégalité de Poincaré discrète)

Pour toute fonction $\vec{V}(\cdot)$ de $T(A, F)$ définie comme ci-dessus, on a :

$$\sum_{K \in \mathbb{F}} \left[\text{aire}(K) \sum_{a \in \mathbb{A}^K} (V_a)^2 \right] \leq 2N(16(N-1) + 24) \frac{[\text{diam}(\Omega)]^2}{w^4} \left[\sum_{K \in \mathbb{F}} \sum_{a, b \in \mathbb{A}^K} \frac{\tau_{a,K} \tau_{b,K}}{\sigma_K} [V_a - V_b]^2 \right] \quad (2.2.8)$$

Proof. Soit Ω un ouvert polygonal connexe de côtés parallèles aux axes de coordonnées en repère orthonormé. Alors il existe $\Omega_1, \dots, \Omega_N$, polygones ouverts convexes disjoints tels que : $\bar{\Omega} = \bigcup_{i=1}^N \bar{\Omega}_i$,

Soit $x \in \Omega$, alors $\exists i \in \{1, \dots, N\}$ tel que $x \in \bar{\Omega}_i$ et $\exists K \in F$ tel que $x \in \bar{K}$.

Puisque Ω est connexe, alors pour chaque côté de K , il existe un chemin brisé formé de segments parallèles aux axes de coordonnées, joignant x à un point du bord de Dirichlet en passant par ce côté.

Soit Ω_j un convexe de Ω , traversé par ce chemin, et tel que $\bar{\Omega}_i \cap \bar{\Omega}_j \neq \emptyset$;

Soit m_{ij} un point frontière de $\bar{\Omega}_i \cap \bar{\Omega}_j$ situé sur le chemin.

Le maillage étant admissible, les interfaces des Ω_i font partie des interfaces du maillage.

Soit $L \in F$ tel que $m_{ij} \in b$, b arête de L , $L \subset \Omega_i$.

Posons $V_{ij} = V_b$.

Soit $a \in \mathbb{A}^K$,

⊙ Si $a \in A^{Int}$, posons $x_{o,a} = x_K, x_{1,a} = x_L$, où x_K et x_L sont respectivement les centres de K et L , avec $a = \bar{K} \cap \bar{L}$.

⊙ Si $a \in A^{Neu}$, posons $x_{o,a} = x_a, x_{1,a} = x_b$, où x_a et x_b sont respectivement les milieux des côtés a et b avec b parallèle à a et $b = \bar{K} \cap \bar{L}$

voir figures (2.1) et (2.2)

Ω_i étant convexe, la ligne brisée joignant $x_{1,a}$ à m_{ij} est supposée être faite de deux segments dirigés chacun par $e \in \{(1, 0), (-1, 0), (0, 1), (0, -1)\}$.

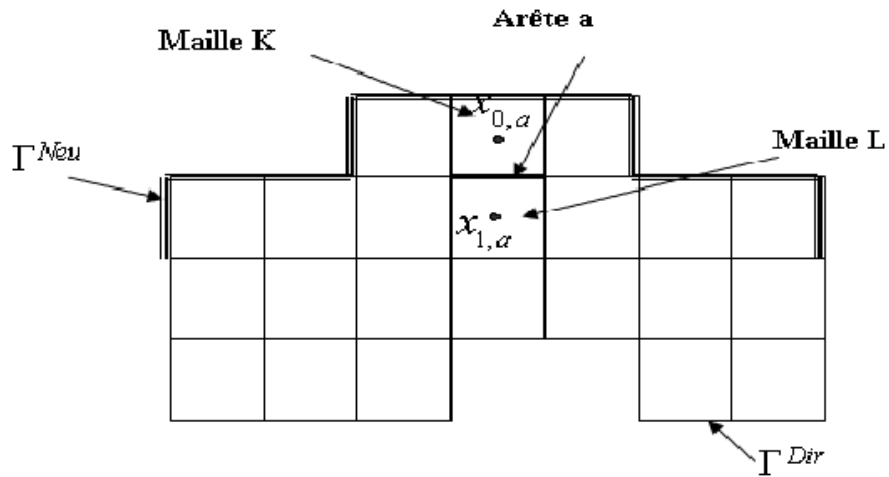


FIG. 2.1 –

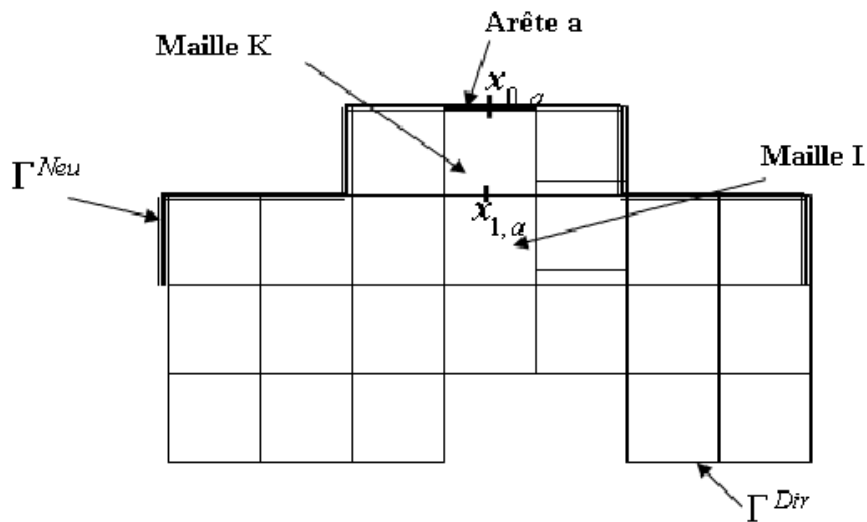


FIG. 2.2 –

Appelons $x_{2,a}$ l'intersection de ces deux segments et posons aussi $x_{3,a} = m_{ij}$. De sorte qu'en joignant les segments $[x_{0,a}; x_{1,a}]$; $[x_{1,a}; x_{2,a}]$; $[x_{2,a}; x_{3,a}]$ on

obtient une partie du chemin annoncé au début (partie allant de $x_{0,a}$ à m_{ij}). Pour $L \in F$, appelons b_L et c_L les côtés de L traversés par le chemin si L est traversée.

Soit $\{\chi_L^{n,a}\}_{\substack{L \in F \\ n \in \{0,1,2\}}}$, la famille des fonctions définies par :

$$\chi_L^{n,a}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } L \cap [x_{n,a}; x_{n+1,a}] \neq \emptyset \text{ et } x_{n,a} \notin L \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad \text{Alors on a :}$$

$$|V_a - V_{ij}| \leq \sum_{n=0}^2 \left(\sum_{L \in F} \chi_L^{n,a}(x) |V_{b_L} - V_{c_L}| \right)$$

Par ailleurs,

$$\left(\sum_{L \in \mathbb{F}} \chi_L^{n,a}(x) |V_{b_L} - V_{c_L}| \right)^2 \leq \left(\sum_{L \in F} \chi_L^{n,a}(x) \frac{|V_{b_L} - V_{c_L}|^2}{d(x_{b_L}, x_{c_L})} \right) \left(\sum_{L \in F} \chi_L^{n,a}(x) d(x_{b_L}, x_{c_L}) \right)$$

$$\text{En remarquant que : } \left(\sum_{L \in \mathbb{F}} \chi_L^{n,a}(x) d(x_{b_L}, x_{c_L}) \right) \leq \sqrt{2} \text{diam}(\Omega)$$

$$\text{car } d(x_{b_L}, x_{c_L}) \leq \sqrt{2} \text{diam}(L)$$

On a :

$$|V_a - V_{ij}|^2 \leq 3\sqrt{2} \left\{ \sum_{n=0}^2 \left(\sum_{L \in F} \chi_L^{n,a}(x) \frac{|V_{b_L} - V_{c_L}|^2}{d(x_{b_L}, x_{c_L})} \right) \text{diam}(\Omega) \right\}$$

D'où

$$\sum_{a \in \mathbb{A}^K} |V_a - V_{ij}|^2 \leq 3\sqrt{2} \sum_{a \in \mathbb{A}^K} \left\{ \sum_{n=0}^2 \left(\sum_{L \in F} \chi_L^{n,a}(x) \frac{|V_{b_L} - V_{c_L}|^2}{d(x_{b_L}, x_{c_L})} \right) \text{diam}(\Omega) \right\} \quad (*)$$

Soit Ω_k avec $k \neq i$, un connexe de Ω , traversé par le chemin joignant m_{ij} à un point du bord de Dirichlet (sous chemin annoncé plus haut) et tel que $\Omega_j \cap \Omega_k \neq \emptyset$.

Soit m_{jk} un point frontière de $\bar{\Omega}_j \cap \bar{\Omega}_k$, situé sur le chemin.

Définissons V_{jk} comme précédemment. Ω_j étant convexe, la ligne brisée joignant m_{ij} à m_{jk} est une fois de plus supposée être faite de deux segments dirigés chacun par $e \in \{(1, 0), (-1, 0), (0, 1), (0, -1)\}$. On a $x_{3,a} = m_{ij}$;

Posons $x_{4,a}$ l'intersection des deux segments ci-dessus ; $x_{5,a} = m_{jk}$.

Soit $\{\chi_L^{3,a}\}_{L \in F}$, $\{\chi_L^{4,a}\}_{L \in F}$ les familles de fonctions définies par :

$$\chi_L^{3,a}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } L \cap [x_{3,a}, x_{4,a}] \neq \emptyset \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$\chi_L^{4,a}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } L \cap [x_{4,a}, x_{5,a}] \neq \emptyset \text{ et } x_{4,a} \notin L \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$x_{3,a}, x_{4,a}, x_{5,a}$ étant tels qu'en joignant les segments $[x_{3,a}, x_{4,a}]$, $[x_{4,a}, x_{5,a}]$, on obtient également une partie du chemin annoncé au début ; celle allant de m_{ij} à m_{jk} .

Pour $L \in \mathbb{F}$, appelons comme précédemment b_L et c_L ses côtés traversés par

le chemin (dans le cas où il est traversé).

$$|V_{ij} - V_{jk}| \leq \sum_{n=3}^4 \sum_{L \in \mathbb{F}} \chi_L^{n,a}(x) |V_{b_L} - V_{c_L}|.$$

En appliquant Cauchy-Schwarz et les mêmes remarques que précédemment, on a :

$$|V_{ij} - V_{jk}|^2 \leq 2\sqrt{2} \left\{ \sum_{n=3}^4 \sum_{L \in \mathbb{F}} \chi_L^{n,a}(x) \frac{|V_{b_L} - V_{c_L}|^2}{d(x_{b_L}, x_{c_L})} \right\} diam(\Omega) \quad (**)$$

Il résulte de la définition de $\vec{V}(\cdot)$ pour $x \in K$ que :

$$\left| \vec{V}(x) \right|^2 = \sum_{a \in \mathbb{A}^K} |V_a|^2 \quad \text{or } V_a = V_a - V_1 + \sum_{p=1}^{N-1} (V_p - V_{p+1})$$

Où les V_p sont les V_{ij} comptés dans le sens du chemin vers le bord de Dirichlet et $V_N \in \Gamma_{Dir}$.

D'où

$$|V_a|^2 \leq N(|V_a - V_1|^2 + \sum_{p=1}^{N-1} |V_p - V_{p+1}|^2) \sum_{a \in \mathbb{A}^K} |V_a|^2 \leq N \left(\sum_{a \in \mathbb{A}^K} |V_a - V_1|^2 + \sum_{a \in \mathbb{A}^K} \sum_{p=1}^{N-1} |V_p - V_{p+1}|^2 \right)$$

Intégrons les deux membres sur Ω , l'on a :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sum_{a \in \mathbb{A}^K} |V_a|^2 dx &= \sum_{K \in \mathbb{F}} (aire(K) \sum_{a \in \mathbb{A}^K} |V_a|^2) \\ \int_{\Omega} \sum_{a \in \mathbb{A}^K} |V_a - V_1|^2 dx &\leq 3\sqrt{2} \sum_{a \in \mathbb{A}^K} \left\{ \sum_{n=0}^2 \sum_{L \in \mathbb{F}} \frac{|V_{b_L} - V_{c_L}|^2}{d(x_{b_L}, x_{c_L})} \cdot \left(\int_{\Omega} \chi_L^{n,a}(x) dx \right) \right\} diam(\Omega) \\ \int_{\Omega} \sum_{p=1}^{N-1} \sum_{a \in \mathbb{A}^K} |V_p - V_{p+1}|^2 dx &\leq \\ &4(N-1)2\sqrt{2} \left\{ \sum_{n=3}^4 \sum_{L \in \mathbb{F}} \frac{|V_{b_L} - V_{c_L}|^2}{d(x_{b_L}, x_{c_L})} \cdot \left(\int_{\Omega} \chi_L^{n,a}(x) dx \right) \right\} diam(\Omega) \end{aligned}$$

On obtient ceci en utilisant (*) et (**).

Comme

$$\int_{\Omega} \chi_L^{n,a}(x) dx \leq h diam(\Omega) \quad \text{et par régularité du maillage, on a :}$$

$$d(x_{b_L}, x_{c_L}) \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \omega h.$$

$$\text{Alors } \int_{\Omega} \sum_{a \in \mathbb{A}^K} |V_a - V_1|^2 dx \leq 4 \times 6 \frac{diam(\Omega)^2}{\omega} \left\{ \sum_{n=0}^2 \sum_{L \in \mathbb{F}} |V_{b_L} - V_{c_L}|^2 \right\} \text{ et}$$

$$\int_{\Omega} \sum_{p=1}^{N-1} \sum_{a \in \mathbb{A}^K} |V_p - V_{p+1}|^2 dx \leq 4 \times 4(N-1) \frac{\text{diam}(\Omega)^2}{\omega} \sum_{n=3}^4 \sum_{L \in \mathbb{F}} |V_{b_L} - V_{c_L}|^2$$

D'où

$$\sum_{K \in \mathbb{F}} (\text{aire}(K) \sum_{a \in \mathbb{A}^K} |V_a|^2) \leq N(16(N-1)+24) \frac{\text{diam}(\Omega)^2}{\omega} \left\{ \sum_{K \in \mathbb{F}} \sum_{a, b \in A^K} |V_a - V_b|^2 \right\}$$

par ailleurs on a :

$$\odot \tau_{a,K} = \frac{\text{mes}(a)}{d(x_a, x_K)} \geq \frac{2\omega h}{h} = 2\omega,$$

$$\odot \tau_{a,K} \leq \frac{2h}{\omega h} = \frac{2}{\omega},$$

$$\odot \sigma_K = \sum_{b \in \mathbb{A}^K} \tau_{b,K} \leq \frac{8}{\omega}$$

$$\text{D'où } \frac{\sigma_K}{\tau_{a,K} \tau_{b,K}} \leq \frac{8}{4\omega \times \omega^2} = \frac{2}{\omega^3}$$

En combinant toutes ces relations, on obtient :

$$\sum_{K \in \mathbb{F}} (\text{aire}(K) \sum_{a \in \mathbb{A}^K} V_a^2) \leq 2N(16(N-1)+24) \frac{\text{diam}(\Omega)^2}{\omega^4} \left\{ \sum_{K \in \mathbb{F}} \sum_{a, b \in A^K} \frac{\tau_{a,K} \tau_{b,K}}{\sigma_K} (V_a - V_b)^2 \right\}$$

■

Proposition 6 *L'unique solution du problème discret (2.2.6)-(2.2.7) notée $\{U_a\}_{a \in \mathbb{A}^{int/Neu}}$ vérifie :*

$$\left(\sum_{K \in \mathbb{F}} \text{aire}(K) \sum_{a \in \mathbb{A}^K} U_a^2 \right)^{1/2} \leq \frac{N(16(N-1)+24)}{T^-} \frac{(\text{diam}(\Omega))^2}{\omega^6} \|f\|_{L^2(\Omega)}$$

Proof. Soit le système discret :

$$\begin{cases} \sum_{K \in \mathbb{F}/a \in \mathbb{A}^K} \sum_{b \in \mathbb{A}^K} \frac{T_K \tau_{a,K} \tau_{b,K}}{\sigma_K} [U_a - U_b] = \sum_{K \in \mathbb{F}/a \in \mathbb{A}^K} \frac{\tau_{a,K}}{\sigma_K} \text{aire}(K) \langle f \rangle_K & \forall a \in \mathbb{A}^{int/Neu} \\ U_a = 0 & \forall a \in \mathbb{A}^{Dir} \end{cases}$$

En multipliant les deux membres de l'équation (2.2.6) par U_a , on obtient après réarrangement :

$$\sum_{K \in \mathbb{F}/a \in \mathbb{A}^K} \sum_{b \in \mathbb{A}^K} \frac{T_K \tau_{a,K} \tau_{b,K}}{\sigma_K} [U_a - U_b]^2 = \sum_{a \in \mathbb{A}^{int/Neu}} \sum_{K \in \mathbb{F}/a \in \mathbb{A}^K} \int_K (f(x) U_a \frac{\tau_{a,K}}{\sigma_K}) dx$$

On pose $\bar{U}_{a,K} = U_{a,K} \frac{\tau_{a,K}}{\sigma_K}$

En remarquant que :

$$\sum_{a \in \mathbb{A}^{Int/Neu}} \sum_{K \in \mathbb{F}/a \in \mathbb{A}^K} \int_K [f(x) \bar{U}_{a,K}] dx = \sum_{K \in \mathbb{F}} \int_K [f(x) \sum_{a \in \mathbb{A}^K} \bar{U}_{a,K}] dx$$

On obtient par une double application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\sum_{a \in \mathbb{A}^{Int/Neu}} \sum_{K \in \mathbb{F}/a \in \mathbb{A}^K} \int_K [f(x) \bar{U}_{a,K}] dx \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \left[\sum_{K \in \mathbb{F}} \text{aire}(K) \left(\sum_{a \in \mathbb{A}^K} \bar{U}_{a,K} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

Comme

$$\left(\sum_{a \in \mathbb{A}^K} \bar{U}_{a,K} \right)^2 \leq \left(\sum_{a \in \mathbb{A}^K} \left(\frac{\tau_{a,K}}{\sigma_K} \right)^2 \right) \left(\sum_{a \in \mathbb{A}^K} U_a^2 \right)$$

Alors,

$$\sum_{a \in \mathbb{A}^{Int/Neu}} \sum_{K \in \mathbb{F}/a \in \mathbb{A}^K} \int_K f(x) U_a \frac{\tau_{a,K}}{\sigma_K} dx \leq \frac{\|f\|_{L^2(\Omega)}}{2\omega^2} \left[\sum_{K \in \mathbb{F}} \text{aire}(K) \left(\sum_{a \in \mathbb{A}^K} \bar{U}_{a,K} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{Car } \sum_{a \in \mathbb{A}^K} \left(\frac{\tau_{a,K}}{\sigma_K} \right)^2 \leq \sum_{a \in \mathbb{A}^K} \frac{1}{16\omega^4} \leq \frac{1}{4\omega^4}$$

D'où l'on a enfin :

$$\sum_{K \in \mathbb{F}/a \in \mathbb{A}^K} \frac{\tau_{a,K} \tau_{b,K}}{\sigma_K} [U_a - U_b]^2 \leq \frac{\|f\|_{L^2(\Omega)}}{2T^- \omega^2} \left[\sum_{K \in \mathbb{F}} \text{aire}(K) \left(\sum_{a \in \mathbb{A}^K} U_a^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}}$$

Par ailleurs, d'après l'inégalité de Poincaré discrète du lemme précédent,

on a :

$$\sum_{K \in \mathbb{F}} \text{aire}(K) \left(\sum_{a \in \mathbb{A}^K} U_a^2 \right) \leq 2N(16(N-1)+24) \frac{\text{diam}(\Omega)^2}{\omega^4} \left\{ \sum_{K \in \mathbb{F}/a,b \in \mathbb{A}^K} \frac{\tau_{a,K} \tau_{b,K}}{\sigma_K} [U_a - U_b]^2 \right\}$$

D'où

$$\left[\sum_{K \in \mathbb{F}} \text{aire}(K) \left(\sum_{a \in \mathbb{A}^K} U_a^2 \right) \right]^{1/2} \leq \frac{N(16(N-1)+24) \text{diam}(\Omega)^2}{T^- \omega^6} \|f\|_{L^2(\Omega)} \quad \blacksquare$$

2.2.2 Estimations d'erreurs

Le problème discret ici est une émanation du système de relations suivantes, satisfaite par la solution exacte $\{u_K\}_{K \in \mathbb{F}}$, $\{u_K\}_{a \in \mathbb{A}^K}^{K \in \mathbb{F}}$, $\{q_{a,K}\}_{a \in \mathbb{A}^K}^{K \in \mathbb{F}}$

$$(S) \left\{ \begin{array}{l} (1) \quad \sum_{a \in \mathbb{A}^K} q_{a,K} = \text{aire}(K) < f >_K \quad \forall K \in \mathbb{F} \\ (2) \quad q_{a,K} = \text{mes}(a) \frac{T_K}{d(x_a, x_K)} [u_K - u_{a,K}] + R_{a,K} \quad \forall a \in A^K, \forall K \in \mathbb{F} \\ (3) \quad \begin{cases} u_{a,K} = u_{a,L}, & \text{(i)} \\ q_{a,K} = q_{a,L} & \text{(ii)} \end{cases} \quad \forall a \in A^K \cap A^L \text{ avec } K, L \text{ adjacentes} \\ (4) \quad u_{a,K} = 0 \quad \forall a \in \mathbb{A}^K \cap A^{Dir} \\ (5) \quad q_{a,K} = 0 \quad \forall a \in \mathbb{A}^K \cap A^{Neu} \end{array} \right.$$

Dans la relation (S)-(2), $R_{a,K}$ représente l'erreur de troncature. Puisque $u \in C^3(\overline{K})$, on a :

$$|R_{a,K}| \leq Ch^2 \text{ où } C \text{ est une constante indépendante de } h.$$

Estimation d'erreurs sur les $\{u_{a,K}\}$

En raisonnant comme dans la construction du problème discret (2.2.6)-(2.2.7), on voit qu'en posant $u_a = u_{a,K}$, les quantités $\{u_a\}_{a \in \mathbb{A}^{Int/Neu}}$ vérifient les équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{K \in \mathbb{F}/a \in \mathbb{A}^K} \sum_{b \in \mathbb{A}^K} \frac{T_K \tau_{a,K} \tau_{b,K}}{\sigma_K} [u_a - u_b] = \\ \sum_{K \in \mathbb{F}/a \in \mathbb{A}^K} \frac{\tau_{a,K}}{\sigma_K} \text{aire}(K) < f >_K - \sum_{K \in \mathbb{F}/a \in \mathbb{A}^K} \frac{\tau_{a,K}}{\sigma_K} R_K \quad \forall a \in A^{Int/Neu} \\ u_a = 0 \quad \forall a \in A^{Dir} \end{array} \right.$$

$$\text{où } R_K = \sum_{a \in A^K} R_{a,K}$$

$$\text{On pose } e_a = U_a - u_a \quad \forall a \in \mathbb{A}$$

Alors on a :

$$e_a = 0 \quad \forall a \in \mathbb{A}^{Dir} \quad \text{et} \\ \sum_{K \in \mathbb{F}/a \in \mathbb{A}^K} \sum_{b \in \mathbb{A}^K} \frac{T_K \tau_{a,K} \tau_{b,K}}{\sigma_K} [e_a - e_b] = \sum_{K \in \mathbb{F}/a \in \mathbb{A}^K} \frac{\tau_{a,K}}{\sigma_K} R_K \quad \forall a \in A^{Int/Neu}$$

Par souci de clarté de l'exposé, supposons la maillage carré de côté h . Dès lors,

$$\frac{1}{2} \sum_{K \in \mathbb{F}/a \in \mathbb{A}^K} \sum_{b \in \mathbb{A}^K} T_K [e_a - e_b] = \frac{1}{4} \sum_{K \in \mathbb{F}/a \in \mathbb{A}^K} R_K \quad \forall a \in A^{Int/Neu}$$

Multiplions les deux membres par $e_{a,K}$ et sommons sur $a \in \mathbb{A}^{Int/Neu}$. On obtient :

$$\sum_{K \in \mathbb{F}/a, b \in \mathbb{A}^K} [e_a - e_b]^2 \leq \frac{1}{2T^-} \sum_{K \in \mathbb{F}} \left(\sum_{a \in \mathbb{A}^K} R_{a,K} \right) \left(\sum_{a \in \mathbb{A}^K} e_a \right) \quad (*)$$

En remarquant que (la conservativité du schéma impose)

$$R_{a,K} + R_{a,L} = 0 \quad \forall K, L \in \mathbb{A} / \Gamma_K \cap \Gamma_L = a$$

$$\frac{1}{2T^-} \sum_{K \in \mathbb{F}} \left(\sum_{a \in \mathbb{A}^K} R_{a,K} \right) \left(\sum_{a \in \mathbb{A}^K} e_a \right) \leq C \sum_{K \in \mathbb{F}} \left(\sum_{a,b \in \mathbb{A}^K} \text{mes}(K) |e_a - e_b| \right)$$

En utilisant Cauchy-Schwarz et l'inégalité de Young ($2\alpha\beta \leq \varepsilon\alpha^2 + \frac{1}{\varepsilon}\beta^2$
 $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+, \forall \varepsilon > 0$)

On a :

$$\frac{1}{2T^-} \sum_{K \in \mathbb{F}} \left(\sum_{a \in \mathbb{A}^K} R_{a,K} \right) \left(\sum_{a \in \mathbb{A}^K} e_a \right) \leq C \sum_{K \in \mathbb{F}} [\text{mes}(K)]^2 + \frac{1}{2} \left(\sum_{K \in \mathbb{F}, a, b \in \mathbb{A}^K} [e_a - e_b]^2 \right) \quad (**)$$

En combinant (*) et (**), on obtient :

$$\frac{1}{2} \sum_{K \in \mathbb{F}, a, b \in \mathbb{A}^K} [e_a - e_b]^2 \leq ch^2$$

D'où

$$\sum_{K \in \mathbb{F}, a, b \in \mathbb{A}^K} [e_a - e_b]^2 \leq ch^2$$

Où c désigne diverses constantes positives indépendantes de h .

Estimations d'erreurs sur les $\{U_K\}$

Considérons toujours sans nuire à la généralité un maillage carré de côté h . Par conservativité de la méthode,

$$R_{a,K} + R_{a,L} = 0 \quad \forall K, L \in \mathbb{F} \ (\Gamma_K \cap \Gamma_L = a \text{ avec } K \neq L)$$

$$\text{Comme } q_{a,K} = 2T_K(u_K - u_{a,K}) + R_{a,K}$$

et $q_{a,K} + q_{a,L} = 0$, on a :

$$2T_K(u_K - u_a) + 2T_L(u_L - u_a) = 0 \Rightarrow u_a = \frac{T_K u_K + T_L u_L}{T_K + T_L} \quad \forall a \in A^{Int}$$

Si $a \in A^{Neu}$, on a $q_{a,K} = 0$

$$\Rightarrow T_K(u_K - u_a) = 0, \text{ c'est à dire } u_a = u_K$$

$$\text{D'où } u_a = \begin{cases} \frac{T_K u_K + T_L u_L}{T_K + T_L} & \text{si } a \in A^{Int} \cap A^K \\ u_K & a \in A^{Neu} \cap A^K \end{cases}$$

Où on a posé $u_a = u_{a,K}$

L'élimination de l'inconnue u_a dans (S) donne :

$$(S') \begin{cases} \sum_{a \in \mathbb{A}^K} q_{a,K} = h^2 \langle f \rangle_K \quad \forall K \in \mathbb{F} \\ q_{a,K} = \begin{cases} \frac{2T_K T_L}{T_K + T_L} [u_K - u_L] + R_{a,K} & \text{si } a \in A^{Int} \cap \mathbb{A}^K \\ 2T_K u_K + R_{a,K} & \forall a \in A^{Dir} \cap A^K \\ 0 & \forall a \in A^{Neu} \cap A^K \end{cases} \quad \forall K \in \mathbb{F} \end{cases}$$

où $L \in \mathbb{F}$, tel que $a = \Gamma_K \cap \Gamma_L$

On a aussi $u_a = 0 \forall a \in \mathbb{A}^{Dir}$ (conditions aux limites)

De même, l'élimination des $U_a = U_{a,K}$, $K \in \mathbb{F}$, $a \in \mathbb{A}^K$ dans le système similaire à (S) mais en U_K donne :

$$(S'') \left\{ \begin{array}{l} \sum_{a \in \mathbb{A}^K} Q_{a,K} = h^2 \langle f \rangle_K \quad \forall K \in \mathbb{F} \\ Q_{a,K} = \begin{cases} \frac{2T_K T_L}{T_K + T_L} [U_K - U_L] & \forall a \in \mathbb{A}^{Int} \cap \mathbb{A}^K \quad \forall K \in \mathbb{F} \\ \frac{2T_K U_K}{2T_K U_K} & \forall a \in \mathbb{A}^{Dir} \cap \mathbb{A}^K \\ 0 & \forall a \in \mathbb{A}^{Neu} \cap \mathbb{A}^K \end{cases} \end{array} \right.$$

où $L \in \mathbb{F}$ est tel que $a = \Gamma_K \cap \Gamma_L$,

On a également $u_a = 0, \forall a \in \mathbb{A}^{Dir}$ (conditions aux limites).

$$\odot e_K = u_K - U_K \quad \forall K \in \mathbb{F},$$

$$\odot e_a = u_a - U_a \quad \forall a \in \mathbb{A}^{Dir}$$

Introduisons les mailles fictives autour de Ω , en posant $e_K = 0, \forall K \in \mathbb{F}^* \setminus \mathbb{F}$.

Où $\mathbb{F}^* = \mathbb{F} \cup \{\text{mailles fictives}\}$

Posons $V^r(K)$ l'ensemble des $L \in \mathbb{F}$ tel que $a \in \Gamma_K \cap \Gamma_L$, avec $a \in \mathbb{A}^{Int}$ ($a \in \mathbb{A}^K$)

$V^f[K]$ l'ensemble des $L \in \mathbb{F}^* \setminus \mathbb{F}$ tel que $a \in \Gamma_K \cap \Gamma_L$, avec $a \in \mathbb{A}^{Ext}$.

Alors il résulte de (S') et (S'') que :

$$\sum_{L \in V^r[K]} \frac{2T_K T_L}{T_K + T_L} (e_K - e_L) + \sum_{L \in V^f[K]} 2T_K (e_K - e_L) = -R_K \quad \forall K \in \mathbb{F}.$$

$$\text{Où } R_K = \sum_{a \in \mathbb{A}^K} R_{a,K} \quad \text{et } e_L = 0 \text{ pour } \forall L \in \mathbb{F}^* \setminus \mathbb{F}$$

En multipliant cette égalité par e_K et en sommant sur $K \in \mathbb{F}$, on obtient :

$$\sum_{K, L \in \mathbb{F} / \overline{K} \cap \overline{L} \in \mathbb{A}^{Int}} \frac{2T_K T_L}{T_K + T_L} (e_K - e_L)^2 + \sum_{K \in \mathbb{F}, L \in \mathbb{F}^* / \overline{K} \cap \overline{L} \in \mathbb{A}^{Ext}} 2T_K (e_K - e_L)^2 = - \sum_{K \in \mathbb{F}} e_K R_K$$

Car $(e_K - e_L)e_K = (e_K - e_L)(e_K - e_L)$

On en déduit puisque la méthode est conservative :

$R_{a,L} + R_{a,K} = 0$ si $K, L \in \mathbb{F}, \overline{K} \cap \overline{L} \in \mathbb{A}$, et que

$$\sum_{K, L \in \mathbb{F} / \overline{K} \cap \overline{L} \in \mathbb{A}^{Int}} (e_K - e_L)^2 + \sum_{K \in \mathbb{F}, L \in \mathbb{F}^* / \overline{K} \cap \overline{L} \in \mathbb{A}^{Ext}} (e_K - e_L)^2 = \sum_{K \in \mathbb{F}, L \in \mathbb{F}^* / \overline{K} \cap \overline{L} \in \mathbb{A}} (e_K - e_L)^2$$

$K \in \mathbb{F}, L \in \mathbb{F}^* / \overline{K} \cap \overline{L} \in \mathbb{A}$

et comme

$$\sum_{K \in \mathbb{F}} e_K R_K = \sum_{K \in \mathbb{F}} e_K \left(\sum_{a \in \mathbb{A}^K} R_{a,K} \right) = \sum_{K \in \mathbb{F}, L \in \mathbb{F}^* / \overline{K} \cap \overline{L} \in \mathbb{A}} R_{a,K} (e_K - e_L)$$

En posant

$$\alpha = \min\left(\frac{(T^-)^2}{T^+}, 2T^-\right)$$

On a :

$$\sum_{K \in \mathbb{F}, L \in \mathbb{F}^*/\bar{K} \cap \bar{L} \in \mathbb{A}} (e_K - e_L)^2 \leq \frac{1}{\alpha} \sum_{K \in \mathbb{F}, L \in \mathbb{F}^*/\bar{K} \cap \bar{L} \in \mathbb{A}} R_{K/L} |e_K - e_L|$$

$$\text{où } R_{K/L} = |R_{a,K}| = |R_{a,L}|$$

Appliquons Cauchy-Schwarz on obtient :

$$\sum_{K \in \mathbb{F}, L \in \mathbb{F}^*/\bar{K} \cap \bar{L} \in \mathbb{A}} R_{K/L} (e_K - e_L) \leq$$

$$\left[\sum_{K \in \mathbb{F}, L \in \mathbb{F}^*/\bar{K} \cap \bar{L} \in \mathbb{A}} (R_{K/L})^2 \right]^{1/2} \left[\sum_{K \in \mathbb{F}, L \in \mathbb{F}^*/\bar{K} \cap \bar{L} \in \mathbb{A}} (e_K - e_L)^2 \right]^{1/2}$$

D'où

$$\left[\sum_{K \in \mathbb{F}, L \in \mathbb{F}^*/\bar{K} \cap \bar{L} \in \mathbb{A}} (e_K - e_L)^2 \right]^{1/2} \leq \frac{1}{\alpha} \left[\sum_{K \in \mathbb{F}, L \in \mathbb{F}^*/\bar{K} \cap \bar{L} \in \mathbb{A}} (R_{K/L})^2 \right]^{1/2}$$

En posant $R_a = R_{K/L}$ si $a \in \bar{K} \cap \bar{L}$

$$\text{Dès lors } \sum_{K \in \mathbb{F}, L \in \mathbb{F}^*/\bar{K} \cap \bar{L} \in \mathbb{A}} (R_{K/L})^2 = \sum_{a \in \mathbb{A}} (R_a)^2$$

Comme on a $|R_{a,K}| \leq ch^2$ on a :

$$R_{a,K} \leq ch^2 = cd_a \text{mes}(a) \text{ avec } d_a = d(x_K, x_L)$$

Alors

$$\sum_{K \in \mathbb{F}, L \in \mathbb{F}^*/\bar{K} \cap \bar{L} \in \mathbb{A}} (R_{K/L})^2 = \sum_{a \in \mathbb{A}} (R_a)^2 \leq ch^2 \sum_{a \in \mathbb{A}} \text{mes}(a) d_a$$

En remarquant que :

$$\sum_{a \in \mathbb{A}} \text{mes}(a) d_a = c \cdot \text{aire}(\Omega)$$

On a :

$$\left[\sum_{K \in \mathbb{F}, L \in \mathbb{F}^*/\bar{K} \cap \bar{L} \in \mathbb{A}} (e_K - e_L)^2 \right]^{1/2} \leq ch$$

D'où

$$\left[\sum_{K \in \mathbb{F}, L \in \mathbb{F}^*/\bar{K} \cap \bar{L} \in \mathbb{A}} (e_K - e_L)^2 \right] \leq ch^2$$

Où c désigne diverses constantes positives indépendantes de h .

Estimation d'erreurs sur les $\{q_{a,K}\}$

Soit $K \in \mathbb{F}$ alors en combinant (S') et (S''), on a :

$$\begin{aligned} \sum_{a \in \mathbb{A}^K} (q_{a,K} - Q_{a,K})^2 &= \sum_{a \in \mathbb{A}^K \cap \mathbb{A}^{Int}} \left(\frac{2T_K T_L}{T_K + T_L} \right)^2 (e_K - e_L)^2 + \sum_{a \in \mathbb{A}^K} (R_{a,K})^2 + \\ &\sum_{a \in \mathbb{A}^K \cap \mathbb{A}^{Int}} 4R_{a,K} \frac{2T_K T_L}{T_K + T_L} (e_K - e_L) + \sum_{a \in \mathbb{A}^K \cap \mathbb{A}^{Int}} 4R_{a,K} T_K (e_K - e_L) + \\ &\sum_{a \in \mathbb{A}^K \cap \mathbb{A}^{Dir}} (2T_K)^2 (e_K - e_L)^2 \end{aligned}$$

En sommant sur $K \in \mathbb{F}$, on obtient grâce à l'inégalité de Young :

$$\begin{aligned} 2R_{a,K} \frac{2T_K T_L}{T_K + T_L} (e_K - e_L) &\leq (R_{a,K})^2 + \left(\frac{2T_K T_L}{T_K + T_L} \right)^2 (e_K - e_L)^2 \\ \beta &= \max\left(\frac{(T^+)^2}{T^-}, 2T^+\right) \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} \sum_{a \in \mathbb{A}^K \cap \mathbb{A}^{Int}} \left(\frac{2T_K T_L}{T_K + T_L} \right)^2 (e_K - e_L)^2 + \sum_{a \in \mathbb{A}^K \cap \mathbb{A}^{Dir}} (2T_K)^2 (e_K - e_L)^2 &\leq \\ \beta \sum_{a \in \mathbb{A}^K} (e_K - e_L)^2 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \sum_{a \in \mathbb{A}^K \cap \mathbb{A}^{Int}} 4R_{a,K} \frac{T_K T_L}{T_K + T_L} (e_K - e_L) + \sum_{a \in \mathbb{A}^K \cap \mathbb{A}^{Dir}} 4R_{a,K} T_K (e_K - e_L) &\leq \\ \sum_{a \in \mathbb{A}^K} (R_{a,K})^2 + \beta \sum_{a \in \mathbb{A}^K} (e_K - e_L)^2 \end{aligned}$$

D'où

$$\sum_{K \in \mathbb{F}} \sum_{a \in \mathbb{A}^K} (q_{a,K} - Q_{a,K})^2 \leq 2\beta \sum_{K \in \mathbb{F}, L \in \mathbb{F}^*/\bar{K} \cap \bar{L} \in \mathbb{A}} (e_K - e_L)^2 + 2 \sum_{a \in \mathbb{A}} (R_a)^2$$

Comme

$$R_a \leq C'h^2; \quad \sum_{a \in \mathbb{A}} (R_a)^2 \leq C'h^2 \sum_{a \in \mathbb{A}} \text{mes}(a) d_a \text{ et } \sum_{a \in \mathbb{A}} \text{mes}(a) d_a = \text{cte. aire}(\Omega)$$

Aussi comme

$$\sum_{K \in \mathbb{F}, L \in \mathbb{F}^*/\bar{K} \cap \bar{L} \in \mathbb{A}} (e_K - e_L)^2 \leq ch^2$$

Alors on a :

$$\sum_{K \in \mathbb{F}} \text{mes}(K) \left[\sum_{a \in \mathbb{A}^K} (q_{a,K} - Q_{a,K})^2 \right] \leq ch^4 + c'h^4$$

D'où

$$\left\{ \sum_{K \in \mathbb{F}} \text{mes}(K) \left[\sum_{a \in \mathbb{A}^K} (q_{a,K} - Q_{a,K})^2 \right] \right\}^{1/2} \leq ch^2$$

Où C et C' désignent diverses constantes positives, indépendantes de h .

Estimation d'erreur sur les $\{q_{a,K}\}$ avec une norme du type gradient

$$\text{Posons } E_{a,K} = q_{a,K} - Q_{a,K}$$

$$\sum_{a,b \in \mathbb{A}^K} (E_{a,K} - E_{b,K})^2 = \sum_{a,b \in \mathbb{A}^K} [E_{a,K}^2 + E_{b,K}^2 + 2E_{a,K}E_{b,K}]$$

Comme

$$\sum_{a,b \in \mathbb{A}^K} E_{a,K}^2 \leq C \sum_{a \in \mathbb{A}^K} E_{a,K}^2$$

$$\text{et } \sum_{a,b \in \mathbb{A}^K} E_{a,K}E_{b,K} \leq C \left\{ \sum_{a \in \mathbb{A}^K} E_{a,K}^2 \right\}^{1/2} \left\{ \sum_{b \in \mathbb{A}^K} E_{b,K}^2 \right\}^{1/2}$$

Alors, on a :

$$\sum_{a,b \in \mathbb{A}^K} (E_{a,K} - E_{b,K})^2 \leq C \left\{ \sum_{a \in \mathbb{A}^K} E_{a,K}^2 + \sum_{b \in \mathbb{A}^K} E_{b,K}^2 + \left(\sum_{a \in \mathbb{A}^K} E_{a,K}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{b \in \mathbb{A}^K} E_{b,K}^2 \right)^{1/2} \right\}$$

or

$$\sum_{a \in \mathbb{A}^K} E_{a,K}^2 = \sum_{a \in \mathbb{A}^K} (q_{a,K} - Q_{a,K})^2$$

$$\sum_{K \in \mathbb{F}} \sum_{a \in \mathbb{A}^K} E_{a,K}^2 \leq \sum_{K \in \mathbb{F}} \sum_{a \in \mathbb{A}^K} [q_{a,K} - Q_{a,K}]^2 \leq ch^2$$

d'où

$$\sum_{K \in \mathbb{F}} \sum_{a,b \in \mathbb{A}^K} [E_{a,K} - E_{b,K}]^2 \leq ch^2 \text{ où } C \text{ désigne diverses constantes positives}$$

indépendantes de h .

Récapitulons tous ces résultats dans la proposition suivante :

Proposition 7 (Estimation d'erreurs) Soit $\{K\}_{K \in F}$ un maillage admissible et régulier (au sens des définitions 1 et 2) du domaine polygonal. Soit $(u, q) \in L^2(\Omega) \times H(\text{div}, \Omega)$ la solution exacte du problème mixte (1.1.1)-(1.1.3), avec $u|_K \in C^3(\overline{K})$ quel que soit $K \in F$

On pose :

- * u_K = valeur de u au centre de la maille $K, K \in F$;
- * $u_{a,K}$ = valeur de u au milieu du côté a de la maille $K, K \in F$ et $a \in A^K$;
- * A^K = ensemble des côtés de la maille K ;
- * $q_{a,K}$ = valeur du flux à travers le côté a de la maille $K, K \in F$ et $a \in A^K$;

$U_K, U_{a,K}$ et $Q_{a,K}$ sont les approximations volumes Finis Mixtes Hybrides (données par le schéma numérique) des quantité $u_K, u_{a,K}$ et $q_{a,K}$ respectivement. Alors, en notant :

⊙ $e_a = u_a - U_a$ $a \in A^K$ avec $A =$ ensemble des arêtes du maillage,

on a :

$$\sum_{K \in \mathbb{F}} \left[\sum_{a, b \in \mathbb{A}^K} [e_a - e_b]^2 \right] + \sum_{K \in \mathbb{F}, L \in \mathbb{F}^* / \overline{K} \cap \overline{L} \in A} [e_K - e_L]^2 + \sum_{K \in \mathbb{F}} \left[\sum_{a \in \mathbb{A}^K} (q_{a,K} - Q_{a,K})^2 \right] \leq Ch^2$$

TESTS NUMÉRIQUES

Les résultats présentés dans cette partie sont obtenues par simulation des écoulements dans des réservoirs fracturés grâce à la méthode des Volumes Finis Mixtes Hybrides.

3.1 Présentation de la Simulation

3.1.1 Démarche méthodologique de la Simulation

La démarche que nous utilisons ici pour simuler des phénomènes de diffusion en milieu poreux est résumée par le diagramme de la figure (3.1). L'organigramme présenté propose les étapes ci-après pendant la phase de simulation :

- ★ Le calcul des transmissivités autour des forages ;
- ★ La discrétisation du champ ;
- ★ L'identification de la nature des diverses mailles et arêtes ;
- ★ Le calcul des transmissivités pour toutes les mailles du champ discrétisé ;
- ★ Le choix d'un algorithme pour la phase de résolution ;
- ★ La résolution effective ;
- ★ La présentation des résultats ;
- ★ Le calage des diverses informations,(débits, transmissivités, conditions aux limites,...) ;
- ★ La validation des résultats obtenus.

3.1.2 Fonctionnement de la simulation

Le simulateur utilisé comporte trois principaux modules :

- ★ Un module d'acquisition des données ;
- ★ Un module de résolution du système ;
- ★ Un module de présentation des résultats

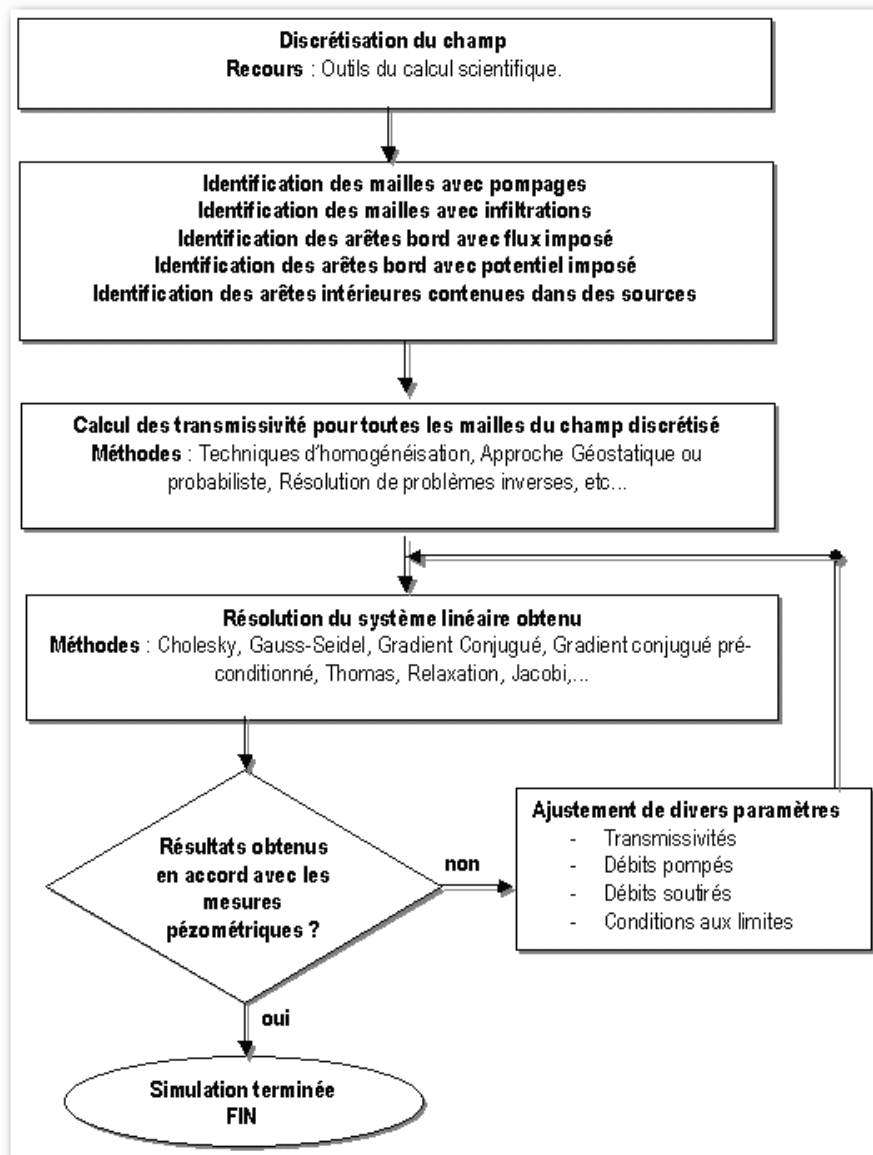


FIG. 3.1 – Démarche adoptée lors des simulations sur des cas concrets

Module d'acquisition des données

Le module d'acquisition des données est entièrement réalisé en `c++` au moyen de l'environnement de développement `c++ Builder`.

IL est conçu essentiellement pour recueillir les données de terrain ci-dessous :

- ★ Les transmissivités ;
- ★ Les forages ;

- ★ Les Infiltrations ;
- ★ La côte piézométrique sur le bord de Dirichlet ;
- ★ Le flux observé sur le bord de Neumann.

Ce module à été programmé grâce à l'utilisation de quatre classes qui sont :

- ⊙ La classe arête qui décrit le comportement d'une arête donnée. Elle stocke les informations suivantes :
 - ★ le type de l'arête (Dirichlet, Neumann, intérieure),
 - ★ Le potentiel,
 - ★ Le flux,
 - ★ Un tableau pointant vers les diverses mailles auxquelles l'arête appartient.
- ⊙ La classe Maille qui décrit le comportement d'une maille donnée. Elle stocke les informations suivantes :
 - ★ le pompage (debit pompé),
 - ★ l'infiltration (débit infiltré),
 - ★ la transmissivité,
 - ★ la somme algébrique des débit pompés et infiltrés.
- ⊙ La classe Unecellule qui contient des informations visant à dessiner une cellule donnée à l'écran.
- ⊙ La classe TFormPrincipale qui contient divers éléments liés à l'interface.

Module de résolution du système

Ce module s'appuie sur la bibliothèque de fonctions très fournies du logiciel Matlab.

Les tests effectués ici utilisent la méthode du gradient conjugué préconditionné pour la résolution du système.

Module de présentation des résultats

Ce module de présentation des résultats est principalement basé sur le logiciel Surfer. La version utilisée lors de nos tests est la version 7.

3.2 Résultats obtenues

Dans cette partie nous présentons les divers résultats obtenus tout au long de notre étude. Dans un premier temps, pour tester la validité de la methode, nous présentons des cas de solutions connues et dans un second temps, le cas de la nappe de Djibouti

3.2.1 Application à des modèles fictifs

Cas d'une solution polynomiale avec conditions aux limites de Dirichlet

⊙ Problème modèle :

$$\begin{cases} -\Delta H = -2(x^2 + y^2) + 20(x + y) \\ H(x, 0) = H(x, 10) = H(10, y) = H(0, y) = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

Avec $\Omega =]0, 10[\times]0, 10[$.

La solution exacte connue est la suivante :

$$H(x, y) = x(x - 10)y(y - 10) \quad (3.2)$$

La figure (3.2) présente le maillage du domaine.

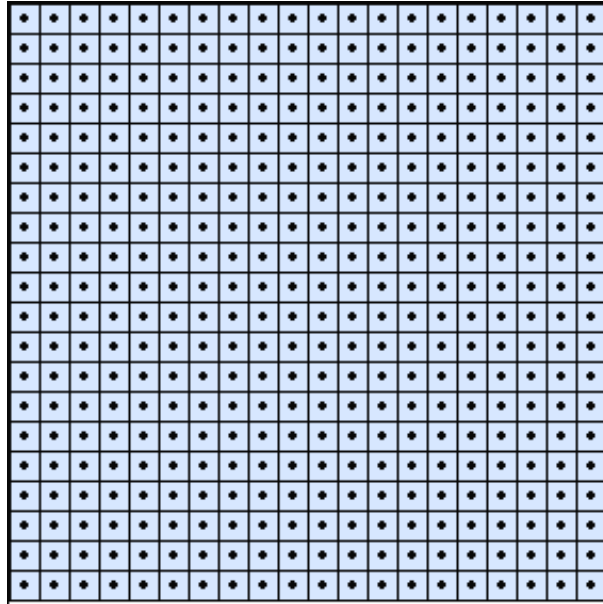


FIG. 3.2 – Maillage du domaine (solution polynomiale)

- ⊙ Variation de l'erreur absolue en fonction du pas h du maillage : Soit H_M valeur exacte du potentiel H au centre d'une maille M ;
Soit \bar{H}_M la valeur du potentiel au centre d'une maille M calculée via VFMH.
Nous allons observer la variation de l'erreur absolue Err en fonction du pas h du maillage.

Err est définie comme suit :

$$Err = \underbrace{Max}_{M \in \mathcal{M}} |H_M - \bar{H}_M| \quad (3.3)$$

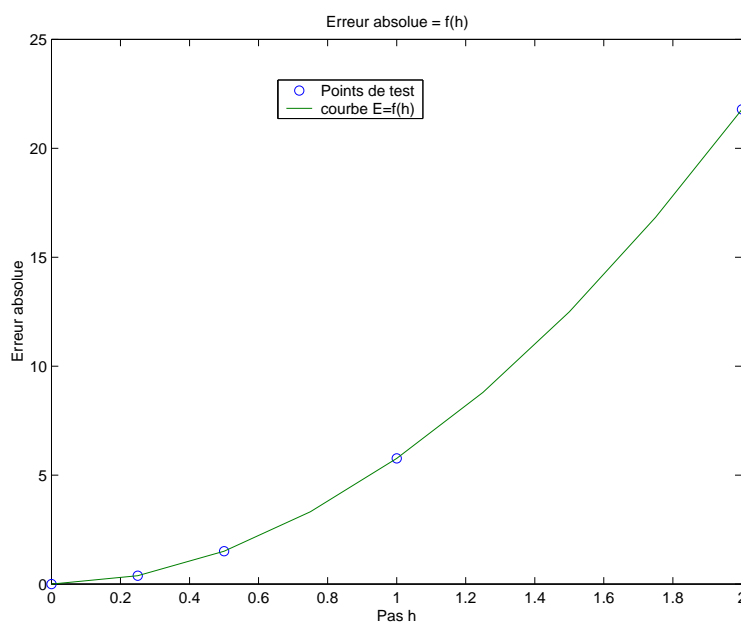


FIG. 3.3 – Variation de l'erreur absolue en fonction du pas h du maillage

- ⊙ Lignes de niveau et lignes de courant : Les figures (3.4) et (3.5) présentent respectivement les lignes de niveaux obtenues et les lignes de courant obtenues lors du tracé de la solution exacte en utilisant le logiciel Surfer. Et les figures (3.6) et (3.7) présentent respectivement les lignes de niveaux et les lignes de courant obtenues lors du tracé de la solution Volumes Finis Mixtes Hybrides. Cependant le tableau de comparaison (3.8) nous montre les écarts entre les deux solutions.

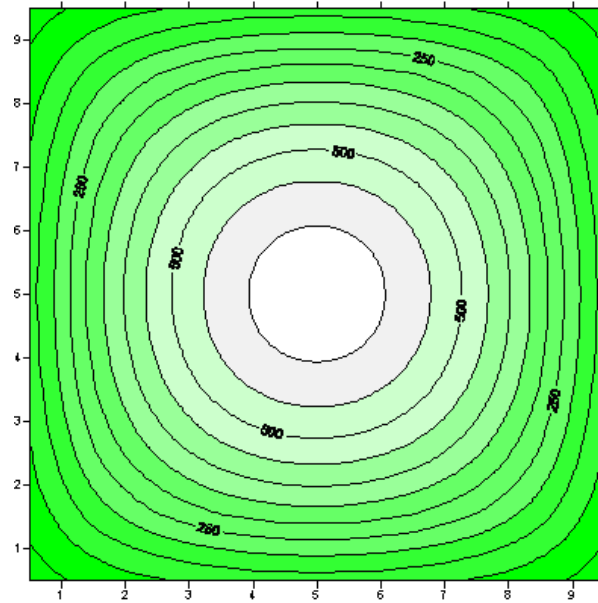


FIG. 3.4 – Lignes de niveau de la solution exacte

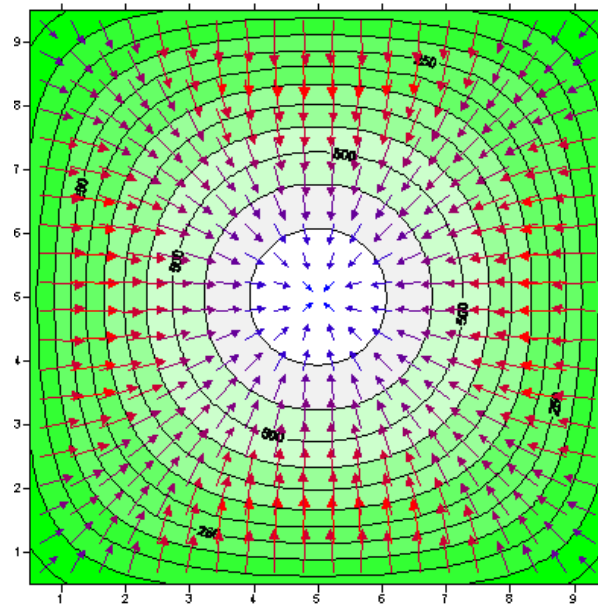


FIG. 3.5 – Lignes de courant de la solution exacte

- ⊙ tableau de Comparaison : Les résultats présentés dans ce tableau ont été obtenus avec un maillage carré de pas $h = 0.5$. Un écart d'environ 1.5044 unités est observé en général. Cependant, nous constatons qu'en

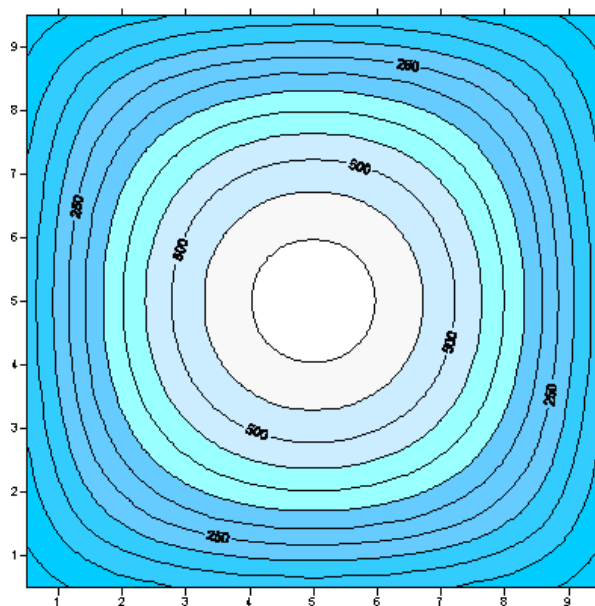


FIG. 3.6 – Lignes de niveau de la solution VFMH

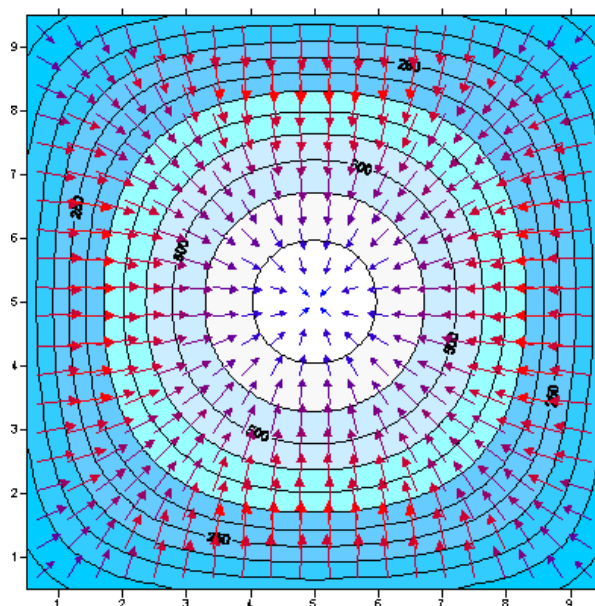


FIG. 3.7 – Lignes de courant de la solution VFMH

affinant le pas du maillage l'écart entre la solution exacte et la solution VFMH n'est presque plus visible. D'où la crédibilité de la méthode de discrétisation utilisée.

Tableau de comparaison			
X	Y	$H(X, Y)_{\text{Solution Exacte}}$	$H(X, Y)_{\text{Solution VFMH}}$
0.25	0.25	5.9414	6.2103
0.25	0.75	16.9102	17.4121
0.25	1.25	26.6602	27.3780
0.25	1.75	35.1914	36.1024
1.25	0.25	26.6602	27.378
1.25	0.75	75.8789	76.6882
5.25	0.25	60.7852	62.2895
5.25	0.75	173.0039	174.4285
5.75	0.75	169.5352	170.9363

FIG. 3.8 – Tableau de comparaison des résultats cas solution polynomiale

Cas d'une solution sinusoïdale avec conditions aux limites mixtes

⊙ Problème modèle :

$$\begin{cases} -\Delta H = 2\pi^2 \cos(\pi x) \cos(\pi y) \\ \frac{\partial H}{\partial X} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_{Nord} \cup \Gamma_{Est} \cup \Gamma_{Ouest} \\ H(x, y) = \cos(\pi x) \quad \text{sur} \quad \Gamma_{Sud} \end{cases} \quad (3.4)$$

Avec $\Omega =]0, 1[\times]0, 1[$.

La solution exacte connue est la suivante :

$$H(x, y) = \cos(\pi x) \cos(\pi y) \quad (3.5)$$

La figure (3.9) présente le maillage du domaine.

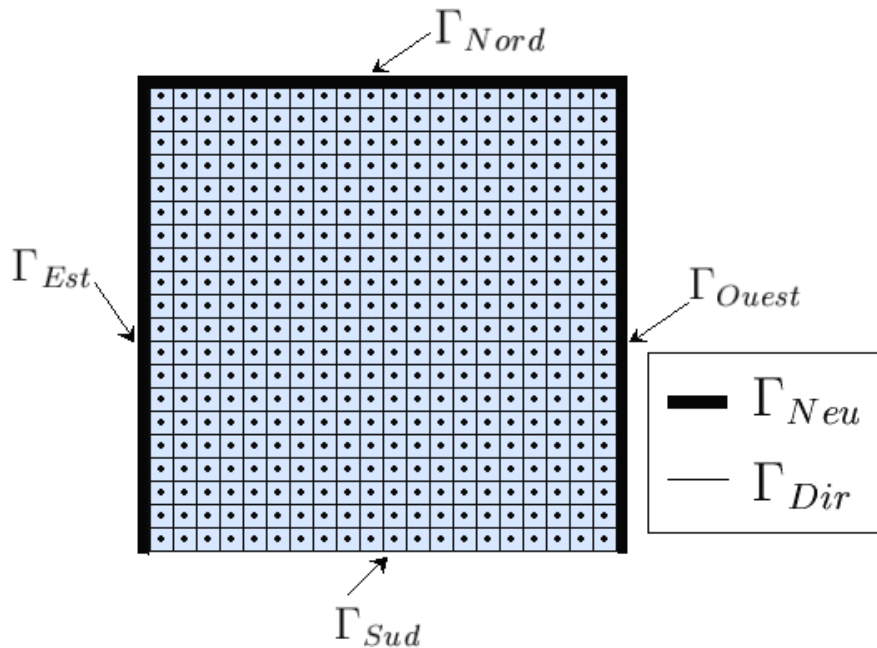


FIG. 3.9 – Maillage du domaine (solution sinusoïdale)

⊙ Lignes de niveau et lignes de courant : Les figures (3.10) et (3.11) présentent respectivement les lignes de niveaux obtenues et les lignes de courant obtenues lors du tracé de la solution exacte en utilisant le logiciel Surfer. Et les figures (3.12) et (3.13) présentent respectivement les lignes de niveaux et les lignes de courant obtenues lors du tracé de la solution Volumes Finis Mixtes Hybrides . Cependant le tableau de comparaison (3.14) nous montre les écarts entre les deux solutions.

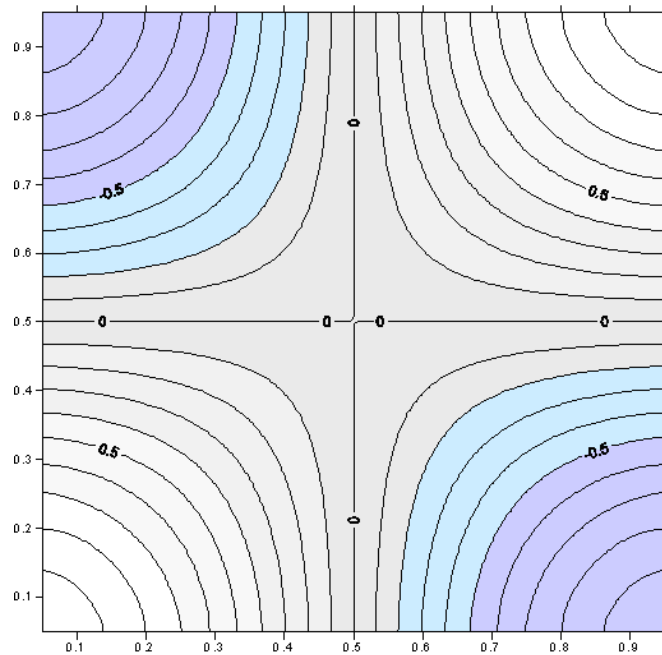


FIG. 3.10 – Lignes de niveau : cas solution exacte sinusoïdale

- ⊙ tableau de Comparaison : Les résultats présentés dans ce tableau ont été obtenus avec un maillage carré de pas $h = 0.1$. Un écart d'environ 0.01 unités est observé en général.

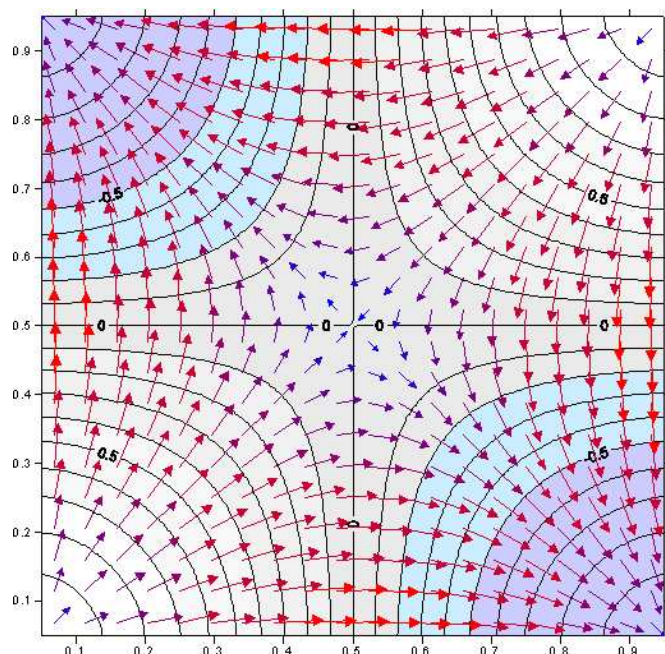


FIG. 3.11 – Lignes de courant : cas solution exacte sinusoïdale

3.2.2 Application à des cas réels : la nappe de Djibouti

La nappe de Djibouti a fait l'objet d'une étude avancée du point de vue investigations géologiques et hydrogéologiques par Jalludin et Razack . Une modélisation de cette nappe par la méthode des différences finis a été réalisée et des résultats de simulation présentés. Le choix de la nappe de Djibouti pour notre étude est guidé par le souci de confrontation de la méthode des Volumes Finis Mixtes Hybrides aux résultats obtenus par ces auteurs, cependant un effort d'harmonisation des données est nécessaire et une rencontre de travail est prévue à cet effet à Poitiers.

- ⊙ Description de l'aquifère (Voir [11]) : L'aquifère des basaltes du golfe alimente en eau potable la ville de Djibouti depuis les années 60. L'exploitation a atteint un débit annuel de 12 mm^3 et l'on constate une dégradation régulière de la quantité d'eau. En raison du climat aride, les précipitations annuelles n'atteignent que 150 mm en moyenne et ne permettent qu'une faible recharge estimée à $12 - 15 \text{ mm}^3$ par an. En vue d'établir un programme de gestion et de protection de l'aquifère, il s'est avéré nécessaire de préciser son fonctionnement.
- ⊙ Objectifs de la modélisation : Nous effectuons ici une modélisation en régime permanent de l'aquifère, les objectifs essentiels poursuivis sont :

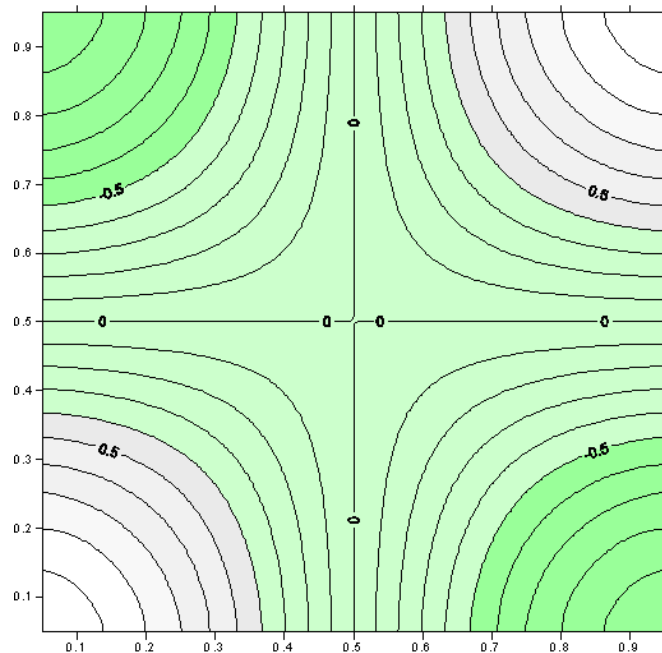


FIG. 3.12 – Lignes de niveau : cas solution VFMH sinusoïdale

- ⇒ L'établissement de la carte piézométrique de l'aquifère ;
- ⇒ L'observation de l'écoulement en régime permanent ;
- ⇒ Reconnaissance des zones d'intérêts de la nappe pour l'implantation de nouveaux forages ;

⊙ Maillage du domaine : La figure (3.15) présente le maillage du domaine dans le cas de la nappe de Djibouti Voir ([11]). Le choix de la dimension des mailles doit respecter un certain nombre de critères :

- Plus les mailles seront petites mieux elles représenteront les contours géométriques de l'aquifère.
- Afin que le modèle puisse tenir compte des hétérogénéités, il importe que la dimension des mailles soit inférieure à celle des hétérogénéités. La discrétisation de la nappe de Djibouti se fera donc sur un maillage régulier, constitué de mailles carrées de pas $h = 500$ m de côté distribué sur 40 lignes et 80 colonnes. Sur l'ensemble des arêtes limites correspondant à la côte, on a fixé la condition de potentiel imposé à $H=0$. Sur le reste des arêtes limites, correspondant à des lignes d'écoule-

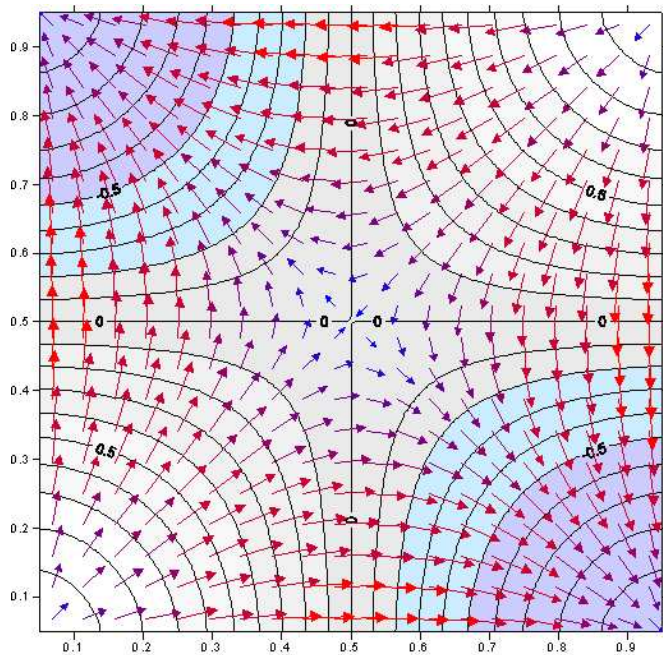


FIG. 3.13 – Lignes de courant : cas solution VFMH sinusoïdale

Tableau de comparaison			
X	Y	$H(X, Y)_{Solution\ Exacte}$	$H(X, Y)_{Solution\ VFMH}$
0.05	0.05	0.97553	0.98359
0.05	0.15	0.88004	0.88731
0.05	0.25	0.70417	0.6984
0.05	0.35	0.4484	0.45211
0.05	0.45	0.15451	0.15579
0.15	0.45	0.13938	0.14054
0.25	0.55	-0.11062	-0.11153
0.25	0.65	-0.32102	-0.32367
0.25	0.85	-0.63004	-0.63524
0.25	0.95	-0.6984	-0.70417
0.35	0.05	0.4484	0.45211

FIG. 3.14 – Tableau de comparaison des résultats cas solution sinusoïdale

ment de la nappe, on a imposé la condition de flux nul $\frac{\partial H}{\partial x} = 0$

⊙ Carte des transmissivités :

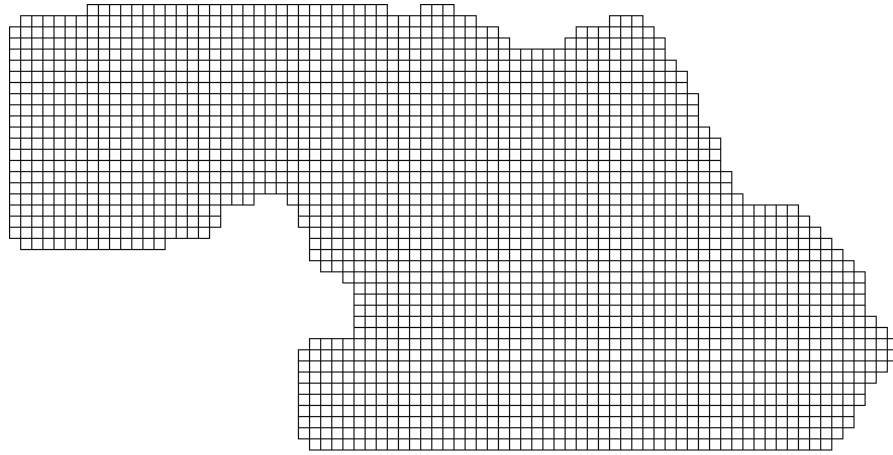


FIG. 3.15 – Maillage du domaine(Nappe de Djibouti)

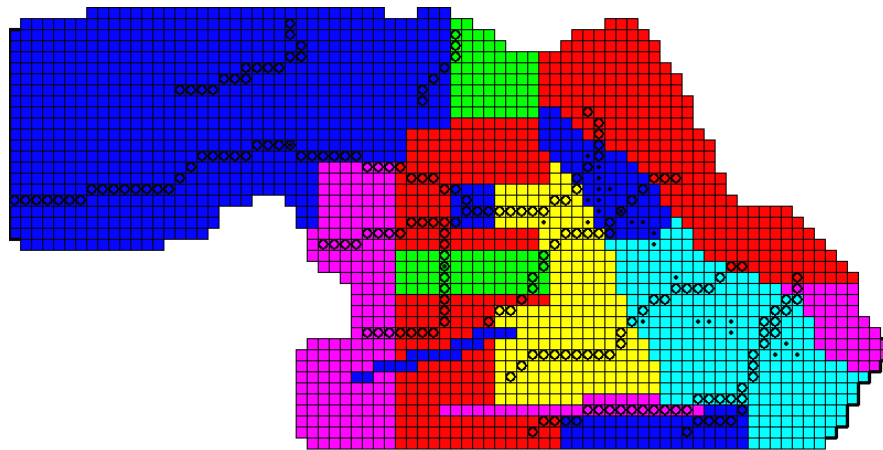


FIG. 3.16 – Carte des transmissivités(Nappe de Djibouti)



FIG. 3.17 – Légende Carte des transmissivités(Nappe de Djibouti)

- ⊙ Carte piézométrique trouvée par la méthode VFMH : Voir Figure 3.18.
- ⊙ Écoulement dans la nappe en régime permanent : Voir Figure 3.19.

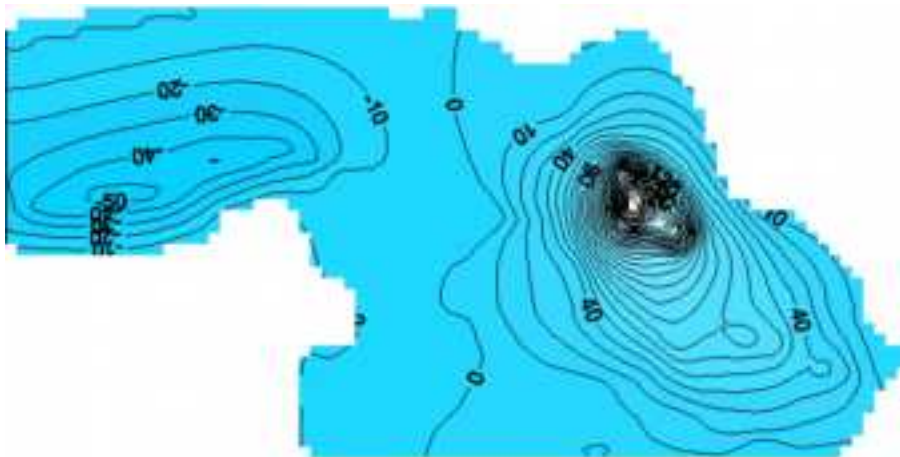


FIG. 3.18 – Carte piézométrique(Nappe de Djibouti)

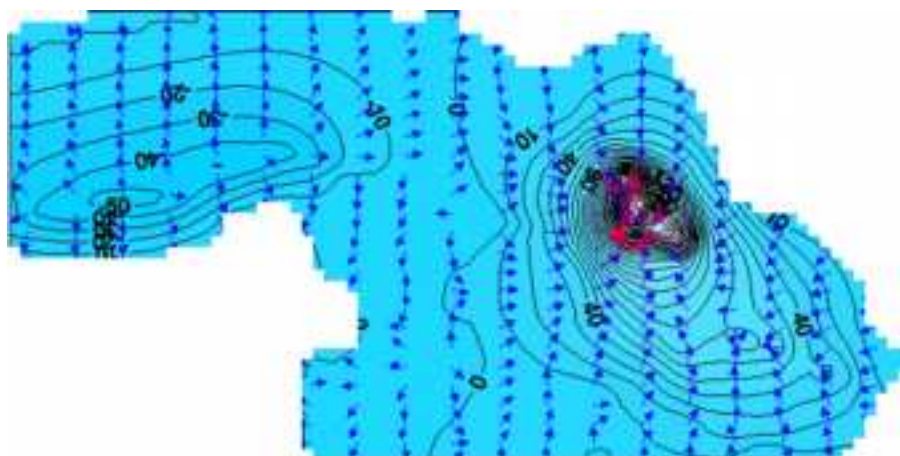


FIG. 3.19 – Écoulement en régime permanent(Nappe de Djibouti)

⊙ Conclusions tirées : Les figures 3.18 et 3.19 nous montrent respectivement la carte piézométrique de la nappe et l'écoulement dans la nappe en régime permanent. Le modèle VFMH établi pour la nappe de Djibouti comparé au modèle différences finies nous amène à tirer les remarques suivantes :

- Il est plus fin : car le plus petit élément renseigné est l'arête (la maille pour le cas différences finies).
- Il est conservatif car l'hypothèse de continuité du flux à la traversée des interfaces des mailles est prise en compte.
- Le système linéaire construit est plus grand, car le nombre d'incon-

- nues est exactement égal aux nombre d'arêtes qui ne sont pas soumises à des conditions de type Dirichlet.
- Les calculs effectués sur des machines de capacité moyenne ne peuvent être menés à terme car il se produit des erreurs du type "mémoire virtuelle insuffisante", ce type d'erreur est lié aux caractéristiques du calculateur utilisé. Pour des essais futurs, il serait souhaitable de disposer d'un calculateur puissant pour la phase de résolution.

CONCLUSION

Nous avons présenté sur un modèle de diffusion bidimensionnel (en régime permanent) une méthode de discrétisation numérique dénomé Volumes Finis Mixtes Hybrides. Nous nous sommes intéressé tout particulièrement au cas des conditions aux limites de Dirichlet-Neumann, cas pour lequel nous avons montré que la méthode est stable au sens de la norme (2.1.2) (Voir propositions 3 et 6) et que les approximations du potentiel u et de la vitesse q sont convergentes (voir propositions 4 et 7).

Nous avons également présenté la connexion entre cette méthode et la désormais classique méthode des Elements Finis Mixtes Hybrides (suivant [8]).

Nous avons enfin appliqué cette méthode à des problèmes de diffusion 2D ce qui nous a permis de démontrer que les systèmes construits par cette approche sont définis positifs et nous avons également constater les éléments suivants :

- ★ Ces systèmes sont symétriques, propriété qui avec la définie positivité, sont dans le cas général considérées comme avantageuses pour la phase de résolution ne serait-ce que parcequ'il existe de nombreux algorithmes permettant de résoudre de tels systèmes.
- ★ Les simulations effectuées sur des cas réels produisent en général des systèmes de très grandes tailles, ce qui impose un minimum d'optimisation pour leur résolution.
- ★ Lors de la phase de résolution des systèmes générés, les solutions de ces derniers ne convergent que pour des systèmes de taille moyenne (moins de 2000 inconnues).
- ★ Toutes ces remarques nous permettent de penser que l'utilisation d'outils performant lors des résolutions sont nécessaires pour améliorer les résultats.

Dans le cadre de ce travail (c'est-à-dire problème de diffusion pure) la méthode que nous venons de présenter généralise la très classique méthode des Volumes Finis largement utilisée dans l'industrie pétrolière et en Hydrologie. L'application de cette méthode à un modèle de diffusion-convection mono

dimensionnel a donné des approximations convergentes dans le cas des conditions de Dirichlet (Voir [7]). L'étude des modèles de diffusion en régime transitoire (équations paraboliques) et de diffusion-convection en régimes permanent et transitoire par les *Volumes Finis Mixtes Hybrides* pourrait être un axe de recherche intéressant.

Bibliographie

- [1] F. BREZZI and M. FORTIN , *Mixed and hybrid finite element methods*, Springer Verlag, New York, 1991.
- [2] G. CHAVENT and J-E ROBERTS , *unified physical presentation of mixed, mixed-hybrid finite element and usual finite differences for the determination of velocities in water-flow problems*, *Advances in Water Ressources*, Vol 14 (1991), N°6, pp329 – 348.
- [3] G. DE MARSILY , *Hydrologie : comprendre et estimer les écoulements souterrains et le transport des polluants*, cours de l'Ecole des Mines de Paris (1994).
- [4] R. EYMARD, T. GALLOUET and R. HERBIN , *Finite Volume methods (April 1997)*, à paraitre dans *Hand-Book of Numerical Analysis*, Ed. P.G. Ciarlet et J.L. Lions.
- [5] C-M. MARLE , *Cours de Production, Tome IV : Les Ecoulements Polyphasiques en milieu Poreux*, Editions Technip, Paris. (1972).
- [6] A. NJIFENJOU *Mixed Hybrid Finite Volume Analysis of Diffusion Problem*, soumis pour publication à *African Journal of Mathematics*
- [7] NJIFENJOU *Mixed Hybrid Finite Volume Analysis of Diffusion-Convection Model*, soumis pour publication à *Journal of Computational Methods in Applied Mathematics*.
- [8] NJIFENJOU *Mixed Hybrid Finite Volume Method Applied to 2D Diffusion Problem*, first International conference on computational Methods in Applied Mathematics, 21-24 July 2003
- [9] P.A. RAVIART and J.M. THOMAS *A Mixed finite element method of 2nd order elliptic problems*, in *Mathematics*, Vol 606, Springer-Verlag, New York, 1977, pp. 292-315.
- [10] J-E. ROBERTS and J.M. THOMAS , *Mixed and Hybrid method*, in *Handbook of Numerical Analysis*, Vol. II, P.G. Ciarlet and J.L. Lions, ads., Elsevier Science Publishers B.V., 1991, pp. 523-639.
- [11] M. JALLUDIN, M. RAZACK, *Modélisation d'un aquifère en milieu volcanique fracturé sous climat aride*, (République de Djibouti), Hard Rock

Hydrosystems(Proceedings of Rabat Symposium S2May 1997)IAHS Publ. N° 241,1997

- [12] [http ://membres.lycos.fr/ymore/re/truc2.html](http://membres.lycos.fr/ymore/re/truc2.html), site web ayant pour thème " L^AT_EX Les Trucs & Astuces", par Yann Morère.
- [13] [http ://www.math.jussieu.fr/zoonek/L^AT_EX/L^AT_EX_samples_chapter/0.html](http://www.math.jussieu.fr/zoonek/L^AT_EX/L^AT_EX_samples_chapter/0.html), site web fournissant des modèles de documents L^AT_EX intéressants, par Vincent Zoonekynd.